EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

7e JAARGANG 1930/31, Nr. 1–2



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. W. BOOMSTRA; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

EEN INLEIDING TOT DE SIGNIFIKA, INZONDERHEID MET HET OOG OP HET ONDERWIJS IN DE WISKUNDE

DOOR

G. MANNOURY.

---

§ 1. Het *spreken,* dat voor ons mensen een der voornaamste en meest gebezigde middelen vormt, waardoor wij invloed op elkanders handelingen en gedachten kunnen uitoefenen, is een handeling van uiterst samengestelde en ingewikkelde aard. Niet alleen, dat de spraakorganen (voornamelik: borstkas, stembanden, tong en verhemelte) bij het uitspreken van een enkel woord een onnoemelik groot aantal kleine bewegingen moeten uitvoeren, waarvan de volgorde en de krachtsverhouding nauwkeurig moeten geregeld zijn, maar reeds de *keuze* van het woord, dat iemand op een bepaald ogenblik wil uitspreken is van duizenderlei invloeden afhankelik, die echter grotendeels niet voor rechtstreekse waarneming vatbaar zijn. In de meeste gevallen nu, d.i. bij het spreken, zoals wij dat in het dageliks verkeer doen, zijn wij ons van dat gehele ingewikkelde samenstel en samenspel van bewegingen, herinneringen, wensen, geluids- en gevoelsprikkelingen, enz. enz. in het geheel niet bewust, m.a.w., wij kunnen er nagenoeg niets van navertellen. Alleen, wanneer zich biezondere moeilikheden voordoen (zoals bij het uitspreken van een lastig woord in een vreemde taal of bij het beantwoorden van een vraag, die al onze aandacht vergt) geven wij ons min of meer rekenschap, hetzij van de bewegingen onzer spraakorganen, hetzij van de beweegredenen, die de keus onzer woorden bepalen. Die aandachtsbepaling vordert dan meestal een vrij grote inspanning, die al spoedig een gevoel van grote vermoeidheid veroorzaakt, die ons in het verder spreken belemmert: wij beginnen te aarzelen en te stamelen, en als de vermoeidheid heel groot wordt (bij het afleggen van een examen b.v.) kan het

gebeuren, dat wij in het geheel geen woorden meer kunnen vinden, en wij, zoals men dat zegt „met de mond vol tanden” staan.

Toch zou ook in een dergelijk geval de sprekende persoon, indien hem òf naar de wijze van uitspreken òf naar de wijze van uitkiezen der door hem gebezigde woorden werd gevraagd, daarvan zeker maar heel weinig weten te zeggen, ...en dat weinige zou misschien niet eens juist zijn, want niets is moeiliker dan zelfwaarneming, zowel op dit als op ander gebied. En wanneer wij voor onze kennis van hetgeen bij het spreken eigenlik geschiedt, alleen afhankelik waren van de mededelingen van min of meer toevallig gekozen proefpersonen, dan zou onze kennis van dit zo hoogstbelangrijke levensverschijnsel nog vrij wat onvollediger zijn, dan ze nu toch nog reeds is. Maar gelukkig is het bedoelde verschijnsel reeds gedurende lange tijd het onderwerp van de ingespannen studie van een groot aantal beoefenaren van verschillende wetenschappen geweest, die langzamerhand allerlei methoden hebben uitgedacht, om door proeven en waarnemingen meer te weten te komen, dan datgene, waarvan de meeste sprekers, al zouden ze nog zo zeer hun best doen, rekenschap zouden kunnen geven. Onder de wetenschappen, die zich, zij het op zeer verschillende wijze en met zeer verschillend doel, hiermede bezig houden, zijn de voornaamste ongetwijfeld de fonetiek, de fysiologie, de psychologie en de taalwetenschap. Van deze wetenschappen omvat de eerstgenoemde alles, wat op de klankvoortbrenging betrekking heeft, terwijl de tweede en de derde te zamen een veel wijder terrein bestrijken: beide toch hebben de levensverschijnselen in het algemeen tot voorwerp-van-onderzoek. Het zal duidelik zijn, dat de taalwetenschap, die weliswaar niet zozeer het spreken zelf, maar dan toch het resultaat daarvan, het gesproken (eventueel het geschreven) woord bestudeert, met de eerstgenoemde studiegebieden ten nauwste samenhangt, ja, daarmede zelfs voor een deel samenvalt. Scherpe grenzen altans zijn hier heel bezwaarlik te trekken.

Van hoeveel verschillende zijden op deze wijze nu ook het verschijnsel van de verstandhouding-door-woorden is bestudeerd geworden, toch bleef tot voor korte tijd één onderdeel van de kwestie min of meer buiten beschouwing, te weten de vraag naar de fysiologiese en psychologiese oorzaken en gevolgen van een *bepaalde* spreekhandeling of *taaldaad,* gelijk wij tegenwoordig

zeggen. Aan *algemene* beschouwingen omtrent die oorzaken en gevolgen ontbrak het geenszins en de taalwetenschappen b.v. hielden zich uitvoerig bezig met de voorstellingen, die door een bepaald *woord* gemeenlik worden opgewekt (een onderdeel dier wetenschappen, dat gemeenlik als de *betekenisleer* wordt aangeduid), maar daarmede was nog maar heel weinig licht verspreid over de moeilike vraag, wat een bepaald persoon op een bepaald moment bewogen kan hebben, nu juist *dit* woord en geen ander uit te spreken, en welke veranderingen die taaldaad in de geest van een bepaalde hoorder heeft teweeggebracht. Niet, dat dergelijke vragen in het geheel niet werden gesteld of onderzocht, maar de beantwoording er van viel vaak buiten de eigenlike gezichtskring van de bovengenoemde of andere wetenschappen; zij viel als het ware in een grensgebied tussen die wetenschappen, en werd dientengevolge vaak verwaarloosd. Daarin nu is in de laatste tien of twintig jaar verandering gekomen, doordien men een aantal van die grensgebieden heeft samengevat binnen een nieuwgetrokken kring van onderzoekingen, die men door de term signifika pleegt aan te duiden, een term, die volstrekt niet hetzelfde omvat als de zoëven door ons genoemde „betekenisleer", al zou dat woord ook als een letterlike vertaling van „signifika" kunnen gelden. Beter dan door een lange en abstrakte omschrijving van wat wij onder signifika hebben te verstaan, meen ik dit door een enkel voorbeeld duidelik te kunnen maken, een voorbeeld, dat ik ontleen aan de gedachtekring, waarmede wij ons in het volgende meer in het biezonder zullen bezig houden, n.l. aan de wiskunde. Stel, een leerling begaat de vergissing, te zeggen, dat de som *van een driehoek* gelijk is aan 180 graden, inplaats van te spreken van: de som *van de hoeken* van die driehoek, dan kan ik hem op die vergissing wijzen, door hem de *betekenis* van het woord „som" in het geheugen te roepen, welke betekenis medebrengt, dat nimmer van de som van één ding (in dit geval: de driehoek) kan gesproken worden, en dan zou ik gebleven zijn op het gebied van de betekenisleer en wel in het biezonder op dat van de wiskundige betekenisleer. Maar die beschouwing zal in de praktijk wel vrij nutteloos zijn, omdat de denkbeeldige zondaar zijn fout denkelik ook wel zonder al die omhaal zal inzien, als hij er maar eenmaal opmerkzaam is gemaakt: de kwestie is daarvoor eenvoudig genoeg. Maar wat minder eenvoudig is, is de vraag, waardoor de bedoelde vergissing (die tot

de zeer vaak voorkomende behoort) is veroorzaakt, en welk misverstand er door zou kunnen worden gewekt of in stand gehouden. *Die* vraag nu is wat wij tegenwoordig noemen een signifiese vraag, en ligt gedeeltelik op psychologies, gedeeltelik op taalkundig en gedeeltelik op wiskundig terrein. Uit dit voorbeeld zal het duidelik zijn, dat de signifika, al is het woord eerst in de laatste tijd in gebruik genomen, niet een spiksplinternieuwe wetenschap is, die verschijnselen onderzoekt, waarvan tot nu toe nog niemand had vernomen, maar dat die term slechts een nieuwe *indeling* van wetenschappelike onderzoekingen aanduidt, waardoor deze beter dan tot nu toe tot hun recht kunnen komen.

§ 2. En nu nog een enkel woord over de toepassing van de signifika, of liever van de signifiese onderzoekingsmethoden, op het gebied der wiskunde.

Er is wellicht geen enkel vak van studie, waarbij de woordkeus aan de beoefenaar zoveel hoofdbreken kost, als dat in de wiskunde het geval is. En zeker geen enkel vak, waarbij dat „hoofdbreken", of, nauwkeuriger uitgedrukt, die verstandelike overwegingen, zozeer van een biezondere persoonlike aanleg afhankelik zijn. In dit laatste opzicht komt de wiskunde sterk overeen met de schone kunsten, waarbij echter de genoemde „verstandelike overwegingen" (ook over hetgeen we daaronder hebben te verstaan zullen we nog te spreken hebben) een veel meer ondergeschikte rol spelen. Deze omstandigheid nu wijst er reeds op, dat het wiskundig denken in hoge mate afhankelik moet zijn van psychologiese oorzaken, waarvan de kennis zowel aan de leraar als aan de leerling in dat vak ten goede kan komen. Immers, als het aan die kennis ten enemale ontbreekt, zullen de leemten, die dat denken bij de laatste mocht vertonen, zowel voor de onderwijzer als voor de onderwezene evenzoveel raadsels zijn, die vaak bij de meest mogelike goede wil van beide zijden onoplòsbare raadsels blijken te zijn. Is daarentegen bij de leerling (om ons voor 't ogenblik tot deze te bepalen) enig signifies inzicht aanwezig, dan zal hij minder vreemd tegenover zijn eigen tekortkomingen staan, en altans een poging kunnen doen, de oorzaak daarvan op te sporen. Alleen reeds het besef, dat de wiskunde niet een geheel opzichzelfstaande, van alle menselike onvolkomenheden gezuiverde en van alle menselike doelstellingen onafhankelike wetenschap is, die eigenlik alleen door biezonder begaafden met vrucht kan worden beoefend, maar door de gewone

sterveling maar liefst met ontzag moet worden aanvaard zonder enige poging, er „het fijne" van te begrijpen, maar dat daarentegen diezelfde hoogverheven wiskunde niets anders is dan een geleidelik uit de gewone omgangstaal door steeds verdergaande samenvattingen en afkortingen ontwikkelde wijze van uitdrukken, alleen dàt besef reeds is in staat, het gevoel van hopelooze onmacht, dat ieder van ons overvallen kan, als hij in een of ander wiskundig vraagstuk met geen mogelikheid „een gat" kan zien, te doen plaats maken voor een meer hoopvolle stemming en een meer vruchtdragende werkwijze. Wie een vraagstuk, dat hem is voorgelegd niet kan oplossen, of een wiskundig betoog niet kan begrijpen, heeft in de eerste plaats te onderzoeken, of de hinderpaal, die zijn verstandelike arbeid in de weg staat, van tijdelike of van meer blijvende aard is. Vermoeidheid of „aandachtskramp" (d.i. belemmering van de gedachteassociaties door overinspanning) kunnen iemand beletten, de allereenvoudigste en meest voor de hand liggende gedachtegang te volgen of de simpelste gevolgtrekking te maken. Wij krijgen dan het gevoel, alsof onze hersenen in een dikke laag watten gepakt zijn, en alsof de woorden in ons boek of de vragen van onze examinator tot een ons geheel onbekende taal behoren. In zulk een geval is het nutteloos, te trachten, door een nog grotere inspanning de moeilikheid te overwinnen, terwijl daarentegen een korte rust of een kleine afleiding soms wonderen kunnen doen. Maar vaak ook zit de oorzaak dieper, en is de „wiskundelijder" niet in het bezit van de voorkennis en de geoefendheid die voor het verrichten van de hem opgelegde taak onontbeerlik zijn. Dan gaat die taak voor het ogenblik boven zijn vermogen en zit er niet anders op, dan door grondige bestudeering van de *voorafgaande* leerstof en door een geduldig instuderen van *gemakkeliker* opgaven de leemte aan te vullen.

En als ook dat alles niet helpt? Als ondanks de meest wanhopige inspanning en eindeloos repeteren en „sommen maken" de moeilikheden niet verminderen en ieder nieuw probleem enkel een nieuw lijden en een nieuwe worsteling om het onbereikbare medebrengt? Wel, ook in dat geval behoeft de zaak niet hopeloos te zijn, en is wellicht een dieperliggend misverstand, een principieële fout in de werkmethode of een z.g. „verdringing" (d.i. een in het onderbewuste sluimerende herinnering van onaangename aard, die de aandachtsbepaling op een bepaald onderwerp in de weg staat) de

oorzaak van het kwaad, die dan echter in de meeste gevallen niet door de patiënt zelf zal kunnen worden ontdekt en verholpen, maar de voorlichting van een ervaren deskundige vereist.

Blijft ten slotte over het geval van een vrij wel absoluut gebrek aan wiskundige aanleg, zoals dat een hoogstenkele maal bij overigens volstrekt niet achterlike, ja soms op ander gebied zeer begaafde leerlingen te konstateren valt. Wel, voor dezulken is het nu eenmaal niet weggelegd, lauweren te oogsten of vruchten te plukken in de mathematiese tuin, en zij zullen zich dienen te troosten met de gedachte, dat men een zeer nuttig lid der samenleving kan wezen zonder de allergeringste notie van de stelling van Pythagoras of het binomium van Newton! „Ein jeder muss auf seine eigene Façon selig werden", heeft „der alte Fritz" reeds gezegd. Een dergelijk uiterste echter, ik merkte het al op, is een vrij zeldzaam voorkomend verschijnsel. Wel loopt de aanleg-voor-wiskunde (ook een onderwerp, waaromtrent in het volgende nog wel een en ander zal te zeggen zijn) bij de verschillende individuen sterk uiteen, maar bij verreweg de meesten is die aanleg toch ruimschoots voldoende, om zich altans de beginselen dier wetenschap, die zij wellicht voor het beoefenen van andere vakken nodig hebben, eigen te maken. Alleen, wanneer de vraag beslist moet worden, of iemand een werkkring of een studierichting zal kiezen, waarbij een verdere, en vooral een meer zelfstandige beoefening van de wiskunde nodig is, zal het zaak zijn, de kwestie van de meer of mindere aanleg (die volstrekt niet naar een rapport- of examencijfer zonder meer te beoordelen valt) met ernst onder de ogen te zien. Ieder dient te woekeren met de talenten, die hij heeft!

HOOFDSTUK I.

De hoofdbegrippen der Signifika.

§ 3. Gelijk wij zoëven reeds terloops opmerkten, houdt de signifika, in onderscheiding van de taalwetenschap in engere zin, zich niet bezig met de algemene betekenis van de verschillende „lexikologiese" *woorden,* maar met wat wij „taaldaden" genoemd hebben, en het zal allereerst nodig zijn, over de draagwijdte van deze term een en ander op te merken.

Onder een taaldaad dan in de ruimste zin des woords zouden

wij eigenlik iedere handeling hebben te verstaan, waardoor een mens of dier invloed op de wil of de stemming van een ander individu tracht uit te oefenen, en zo opgevat, zouden de lok- of dreighoudingen en geluiden, die men bij de meeste diersoorten heeft opgemerkt, evengoed tot de „taaldaden" te rekenen zijn, als het zingen van een aria door een operazanger of het houden van een pleitrede door een advokaat. Zo ruim echter zullen wij de betekenis van dit woord in het volgende niet nemen, doch onder een taaldaad enkel verstaan het geheel van de stoffelike en geestelike verschijnselen, die met het (hardop of in gedachte) uitspreken van een bepaald woord, of liever van een korte zin of een zinsdeel, voorzover dat als een zelfstandig geheel te beschouwen is, gepaard gaan. Als b.v. een jager zijn hond toeroept: „In je hok! Allo!", en die woorden misschien van een welsprekend gebaar vergezeld doet gaan, dan hebben wij hier met een enkele taaldaad in signifiese zin te doen, en dienen wij, om die taaldaad te bestuderen, niet alleen te letten op hetgeen bij de jager, maar ook op hetgeen bij de hond „omgaat", gelijk men wel eens zegt, waarbij het alleen maar jammer is, dat we voorzover de laatste rubriek van geestelike verschijnselen betreft, bij gebrek aan „hondelike" ervaring, enkel op gissingen zijn aangewezen! Of wanneer (om bij de geheel *menselike* gedachtewisseling te blijven) de tramkondukteur aan een passagier vraagt, waar deze wil afstappen, dan vormt die vraag in signifiese zin één geheel, waaraan bij nauwkeurig overwegen een groot aantal fysiese, fysiologiese en psychiese verschijnselen vallen te onderscheiden, die echter alle met elkander in het nauwste verband staan. De spraakorganen van de spreker hebben door hun bewegingen een zekere reeks geluidstrillingen in de lucht veroorzaakt, die (door tussenkomst van een nieuwe reeks fysiologiese verschijnselen) in de geest van de persoon, tot wie de vraag gericht was, een massa voorstellingen, wensen, herinneringen, overwegingen, enz., enz. heeft teweeggebracht, die tenslotte tot een nieuwe taaldaad: het antwoord op de gestelde vraag, aanleiding geven. Op het eerste gezicht lijkt dit alles voor de leek geweldig overdreven, en is deze geneigd om te menen, dat de zaak veel eenvoudiger is: de kondukteur vraagt niet anders dan: „waar moet u heen?" en de meneer of de juffrouw, die het aangaat, antwoordt: „Leidsche plein" of zo iets en daar is de zaak mee afgelopen. En nu mogen die spraakorganen heel ingewikkelde bewegingen hebben gemaakt,

de *geestelike* verschijnselen, waarvan hier sprake is, schijnen toch wel heel onbelangrijk: aan de vraag van de kondukteur lag slechts één wens ten grondslag, n.l., te weten, wanneer hij moet afbellen, en het antwoord van de passagier is de uitdrukking van slechts één voorstelling, n.l. die van de plaats van bestemming. Wie zo redeneert echter, verliest de onderscheiding uit het oog, waarop wij reeds in het begin van onze beschouwing de aandacht hebben gevestigd, namelik het verschil tussen *bewuste* en *niet-bewuste* voorstellingen, wensen, enz. Wij hebben daarbij het onderscheid tussen deze twee soorten geestelike verschijnselen gezocht in het kriterium, of de betreffende persoon desgevraagd *rekenschap* kan geven van hetgeen in zijn geest is omgegaan, of hij het „kan navertellen", en hebben het psychiese verschijnsel alleen in het laatste geval *bewust* genoemd, maar dit is natuurlik slechts een voorlopige en vrij vage onderscheiding. Wat iemand omtrent zijn eigen innerlike ervaringen kan „navertellen", hangt in de eerste plaats van de persoon, die het aangaat, en in de tweede plaats van de omstandigheden af. En een volle tramwagen is voor diepgaande zelfbeschouwingen al een heel ongeschikte plaats, zodat het niet onwaarschijnlik is, dat de beide deelnemers aan ons denkbeeldig tramgesprek bij onmiddellike navraag inderdaad niet veel meer omtrent hun eigen gedachten en voorstellingen zouden kunnen meedelen dan het weinige, dat we zoëven noemden. Maar een geoefend en fijngevoelig waarnemer kan dikwijls heel wat meer biezonderheden omtrent een schijnbaar eenvoudig gebeuren in zijn eigen geest mededelen en beschrijven, en op die wijze kostbaar materiaal aan de beoefenaar van de signifiek of van de psychologie in het algemeen verschaffen, terwijl onder de invloed van buitengewone omstandigheden (heftige gemoedsbewegingen, ziektetoestanden, hypnose) het vermogen tot zelfwaarneming en tot mededeling of blijkgeving van herinneringen aan z.g. inwendige ervaringen nog in biezondere mate gescherpt kan zijn. De grens tussen „bewuste" en „niet-bewuste" geestelike verschijnselen is dus met behulp van het gekozen kenmerk-van-onderscheid bezwaarlik te trekken, en men is er daardoor toe gekomen, nog een tussenstadium tussen „bewuste" en „onbewuste" geestesinhouden te onderscheiden, n.l. de *onderbewuste* psychiese verschijnselen. Ook omtrent deze techniese term, die in de signifika een belangrijke rol vervult, zal een korte uiteenzetting noodzakelik zijn.

§ 4. Als onder de voorbijgangers, die iemand op zijn dagelikse weg door de stad (van kantoor naar huis en omgekeerd b.v.) ontmoet, zich herhaaldelik dezelfde personen bevinden, dan zal het niet lang duren, of sommige gezichten beginnen hem bekend voor te komen, zonder dat nog zijn aandacht op deze of gene in het biezonder is gevallen. Dit bewijst, dat de zo vluchtige gezichtsindruk, die wij van *iedere* voorbijganger hebben ontvangen, niet geheel verloren is gegaan, omdat anders ook een *herhaling* van dergelijke gezichtsindrukken generlei uitwerking zou kunnen hebben: duizend maal nul *blijft* nul! En dan zal toch wel hetzelfde voor alle andere zintuiglike indrukken moeten gelden, en inderdaad zijn de psychologen door deze en een groot aantal soortgelijke overwegingen tot de overtuiging gekomen, dat *iedere* zinsindruk, of liever gezegd: iedere geestelike ervaring, hoe onbeduidend en oppervlakkig die ook geweest mag zijn (misschien met uitzondering van die uit de allervroegste kinderleeftijd en van indrukken, die tengevolge van ziektetoestanden of hersenverwondingen zijn teloorgegaan), een *spoor* achterlaat, dat gedurende het gehele leven van de individu blijft bestaan, *en voortdurend invloed uitoefent op diens geestesinhoud.* Het spreekt wel vanzelf, dat deze sporen voor het allergrootste deel zó zwak zijn, dat zij ieder voor zich aan elke zelfwaarneming, ook in de meest gunstige of biezondere gevallen, ontsnappen, zodat de betrokken persoon er nimmer iets van zal kunnen „navertellen".

Als wij ons kriterium van zoëven dus konsekwent willen toepassen, mogen wij die „sporen" nòch tot de bewuste, nòch tot de onderbewuste geestesverschijnselen rekenen. Daar staat tegenover, dat wij de *massawerking* dier sporen bij enige oplettendheid wel degelik aan ons zelve kunnen waarnemen. Hoe zou ik b.v., kunnen weten, om nog enkele alledaagse voorbeelden te noemen, wat „blijdschap" of „verveling" beduidt, of dat knellende laarzen en nauwe boorden het genoegen van een zomerwandeling kunnen bederven, of dat ik als kind bang in donker was, of dat het 's winters dikwijls sneeuwt, en 's zomers warm en stoffig is, als àlle laars- of boordkwellingen of donkere-kast-benauwingen en àlle sneeuwvlok- of stofwolkherinneringen spoorloos uit mijn geestesinhoud verdwenen waren? En toch zullen wij ons misschien geen enkele, of altans maar heel weinige van die millioenen of milliarden gewaarwordingen afzonderlijk kunnen „te binnen brengen". Het is om die

reden, dat men bedoelde zwakke herinneringsbeelden (en ook nog enkele andere invloeden, die daarmede overeenkomst vertonen) als het „onbewuste" geestesgebied aanduidt, al mag die aanduiding dan eigenlik ook een „contradictio in terminis" bevatten! De studie dezer geheel *on*bewuste geestesverschijnselen ligt meer op het gebied der eigenlike fysiologie en psychologie dan op dat der signifika, en zal altans hier buiten beschouwing gelaten worden, maar des te meer aandacht zullen wij hebben te besteden aan dat grote tussengebied, dat onze onbewuste geestesinhoud van de duidelik en volkomen bewuste geestesverschijnselen scheidt: het *onder*bewuste. Dat er in dit geval nimmer van een scherpe grenslijn sprake zal kunnen zijn, ligt in den aard der zaak, al zijn door middel van bepaalde afspraken en welomschreven kenmerken de hierbedoelde termen nog wel wat nader te preciseren. Dat willen wij nu echter voor het oogenblik liever achterwege laten (uit vrees, dat onze al te droge en abstrakte uiteenzettingen misschien spoedig en hopeloos in het „onbewuste" van de lezer verzwolgen zouden worden en geen andere „massawerking" op hem zouden uitoefenen, dan dat die hele signifika toch eigenlik niets anders is dan een soort moderne muggenzifterij!) en in plaats daarvan op een verschijnsel wijzen, dat ieder onzer dageliks ervaart, en bij uitstek geschikt is, om de werking van het onderbewuste te leren onderkennen, n.l. het ontwaken uit de slaap.

In de eerste plaats dan zij hier gewezen op de, bij de meeste mensen onmiddellik bij of na het ontwaken in het bewustzijn tredende z.g. droomherinneringen, en merken wij op, dat deze herinneringsbeelden niet alleen meestal heel vaag en onduidelik, maar ook buitengewoon vluchtig zijn. Als wij die herinneringsbeelden niet door een biezondere aandachtspanning (door opschrijven of mededelen b.v.) als het ware fixeren, worden zij al spoedig door de stroom van waarnemingen en andere gewaarwordingen, welke de wakende toestand medebrengt, zozeer verdrongen, dat wij reeds na weinige ogenblikken buiten staat zijn, er ook maar de kleinste biezonderheid van mede te delen, en op de vraag van een der huisgenoten: „heb je gedroomd?" misschien ten antwoord zouden geven: „zeker heb ik gedroomd, en zometeen wist ik nog precies wat, maar nu ben ik het totaal vergeten". M.a.w.: de eerste herinnering aan de droomervaring is *onderbewust* geworden, en de herinnering-aan-die-herinnering is *bewust* gebleven. En de droombeelden of droomervaringen zelf, die gedurende de slaap optreden, tot welke rubriek

van geestesverschijnselen moeten wij die rekenen? Wel, van een rechtstreeks, door woorden of andere aanduidingen *mededelen* van de droomgewaarwordingen door de slapende kan in normale gevallen geen sprake zijn (en uitzonderings- of grensgevallen dient de beginnende beoefenaar der signifiek zoveel mogelik uit te schakelen, wil hij geen gevaar lopen in een hopeloze verwarring van begrippen te vervallen), zodat wij zeker de droombeelden, *ook op het ogenblik, dat zij ontstaan,* niet tot het bewustzijn mogen rekenen, wat trouwens ook met het heersende, nietwetenschappelike spraakgebruik ten enemale in strijd zou zijn. En daar toch deze droombeelden (alweer op het ogenblik zelve van hun verschijnen of beleefd worden) door het betrokken individu worden *waargenomen* (en wel rechtstreeks of z.g. innerlik), hebben wij hier met een zuiver voorbeeld van onderbewustzijn te maken. Zoals wij reeds zeiden, is het met de *droomherinneringen,* die bij het ontwaken optreden, een ander geval: daarvan zouden wij altans *in het eigen ogenblik* rekenschap kunnen geven, wat wij als kenmerk van het *bewuste* geestesleven hebben gekozen, maar de droom als zodanig *vormt een geheel van uitsluitend onderbewuste geestesverschijnselen,* en is dus een uitstekend objekt-van-vergelijking, als wij in de geestesinhoud van ons waakleven het bewuste en het onderbewuste bestanddeel van elkander willen onderscheiden, een onderscheiding, waarop wij in de loop van onze onderzoekingen nog menigmaal denken terug te komen.

§ 5. Een taaldaad is een daad, waardoor wij *invloed* op elkander trachten uit te oefenen, hebben wij in de aanvang van dit hoofdstuk vooropgesteld, en uit die definitie volgt, dat bij een volledig tot stand gekomen taaldaad twee partijen te onderscheiden vallen: hij die de taaldaad verricht, en hij die haar ondergaat, of: de „spreker" en de „hoorder", gelijk wij in het vervolg, met een kleine uitbreiding van de gewone betekenis dier termen, zullen zeggen. Welnu, het blijkt bij nadere beschouwing, dat de geesteswerkingen van die spreker en die hoorder (altans bij een gewoon, rechtstreeks gesprek), in voortdurende *wisselwerking* met elkander staan, zodat niet alleen de spreker op de hoorder, maar ook omgekeerd de laatste op de eerste gedurende het zich voltrekken van de taaldaad invloed uitoefent. De spreker neemt niet alleen de hoorder waar, en leidt uit diens houding en gelaatsuitdrukking af, welke uitwerking zijn woorden op deze hebben, maar hij vormt zich

tegelijkertijd een min of meer duidelike voorstelling van de wijze, waarop de hoorder verder op zijn taaldaad zal reageren, een voorstelling, die onder de overwegende invloed staat van de herinneringen, die hij aan vroegere gesprekken met dezelfde of met andere personen heeft bewaard. Zo zal de tramkondukteur uit ons voorbeëld van zoëven gedurende het uitspreken van zijn vraag reeds een vage verwachting gaan koesteren omtrent toon en inhoud van het antwoord. Dat moet men zich nu niet zó voorstellen, alsof hij bij iedere passagier, tot wie hij de bedoelde stereotiepe vraag richt, reeds vóór het antwoord tracht te *raden,* waar deze toch zal heenwillen, neen, al die verwachtingen en voorstellingen blijven, uitzonderingen alweer daargelaten, in het onderbewuste, maar zij oefenen toch een voor de deskundige waarnemer duidelik merkbare werking op de spreker uit. En behalve deze, van de hoorder naar de spreker uitgaande invloeden, ondergaat deze laatste ook nog de psychiese uitwerking, *die hij van het vernemen van zijn eigen stemgeluid ondervindt,* m.a.w. hijzelf ondergaat de taaldaad, die van hem is uitgegaan: hij is, behalve spreker, ook „hoorder". Wie er zich slechts even moeite voor geeft, kan door zelfwaarneming, liefst van weinig gekompliceerde gevallen, al vrij spoedig enig denkbeeld krijgen van het verbazend ingewikkeld geestesproces, dat zich bij de simpelste taaldaad afspeelt. Herinneringen, verwachtingen en waarnemingen spelen in een ondeelbaar ogenblik een niet te ontwarren wisselspel, waarvan alleen de einduitkomst: het ten slotte gekozen en tot uitdrukking gebrachte woord of het volbrachte gebaar, tot het bewustzijn van spreker en hoorder doordringen. Om in dat warnet van geestelike verschijnselen altans enigermate orde te kunnen brengen, zullen wij in het volgende daarbij twee hoofdgroepen onderscheiden, die wij als de „spreekbetekenis" en de „hoorbetekenis" van de te onderzoeken taaldaad zullen aanduiden, daarbij onder de „hoorbetekenis" verstaande het geheel van werkingen, die (zowel bij spreker als hoorder) van de taaldaad, of liever van de verschillende opeenvolgende onderdelen daarvan *uitgaan* en onder de „spreekbetekenis" de verschijnselen, die daaraan *voorafgaan.* Anders gezegd: de spreekbetekenis is de *oorzaak,* de hoorbetekenis is het *gevolg* van de taaldaad en haar onderdelen, waarbij wij die begrippen voorlopig in de beperkte zin zullen verstaan, die uit de hier geschetste gedachtegang voortvloeit, zodat oorzaken en gevolgen, die buiten de bewustzijnskring van spreker

en hoorder liggen, niet onder de hier ingevoerde begrippen vallen.

Nog twee opmerkingen meen ik ten aanzien van de onderscheiding dezer twee verschijnselengroepen te moeten maken, alvorens tot een nadere ontleding hunner bestanddelen over te gaan. De eerste opmerking is eigenlik slechts een waarschuwing, en misschien zelfs voor de meeste lezers een overbodige. N.l. deze, om de begrippen hoor- en spreekbetekenis niet te verwarren met het (taalkundige) begrip *woordbetekenis*. Dit laatste omvat in hoofdzaak de verschillende voorstellingen, bedoelingen of stemmingen, die *in het algemeen* zowel bij spreker als hoorder *bewust* worden (of laten wij liever, ter onderscheiding van het zoëven ingevoerde begrip „onderbewustzijn", hier van „bovenbewust" spreken), terwijl wij in de signifika steeds onze aandacht vestigen op het geheel van onder- èn bovenbewuste geestesverschijnselen, die met een bepaalde *taaldaad* gepaard gaan. Als wij b.v. naar de spreekbetekenis van de taaldaad uit ons eerste voorbeeld (de jager met zijn hond) vragen, dan vormt daarvan ongetwijfeld niet de voorstelling van het *hok,* maar die van de *hond* het 't meest op de voorgrond tredende bestanddeel, terwijl toch het *woord* hond niet eens werd uitgesproken. Wel zal ook de voorstelling van het hondehok zelf (en dan wel die van dàt bepaalde hondehok, dat aan zijn viervoetige jachtkompagnon tot woning strekt) bij de jager min of meer duidelik bewust worden, maar die *beide* gezichtsvoorstellingen vormen slechts onderdelen van een veel uitgebreider voorstelling, n.l. die van: *de hond, in zijn hok gaande,* een voorstelling (of „voorstellings*komplex*", gelijk men in dergelijke gevallen zegt), die reeds bij de jager vrij levendig aanwezig was, eer hij het allereerste woord van ons proefzinnetje had uitgesproken. Op welke wijze een voorstellingskomplex als het onderhavige (dat dus op een *beweging* betrekking heeft) eigenlik in elkaar zit, zullen wij in het volgende hoofdstuk, als wij het over het meetkundig denken hebben, nader uiteenzetten, maar hier zij er toch reeds op gewezen, dat daarbij niet alleen *gezichtsbeelden* (te weten: die van de hond en zijn omgeving in de verschillende standen, die hij achtereenvolgens zal moeten aannemen, om zijn hok te bereiken) maar ook z.g. spiergevoelsbeelden een grote rol zullen blijken te spelen, en de zaak daarmede eigenlik nog niet eens afgelopen is. Maar genoeg. Hoofdzaak is, dat de lezer er zich van doordringe, dat de hierbedoelde spreekbetekenis van de beschouwde taaldaad volstrekt niet

uit vier op elkander volgende onderdelen bestaat, die ieder afzonderlik aan de vier woordjes „in", „je", „hok" en „allo" zouden beantwoorden. Een taaldaad is niet een keten van woordbeelden met daaraan vastgehaakte voorstellingen, maar een psychies verschijnsel, waarbij woord- en andere beelden op zodanige wijze op elkander inwerken, dat (in de regel altans) een bepaalde woordenreeks tot uitdrukking wordt gebracht. Als wij die woordenreeks (een volzin meestal) bij een spoortrein vergelijken, dan is de taaldaad het *in elkaar zetten* en het *besturen* van die trein, en om dat richtig te kunnen volbrengen, hebben de machinist en de rangeerder en de stationchef en de wagenmeester, en wie daar nog verder aan te pas komen, met heel wat meer gegevens te werken dan met een lijstje van zus of zoveel wagennummers. Daar komen, om maar iets te noemen, de ligging van de spoorbaan en de wisselstanden toch zeker ook bij te pas.

En dan nog een tweede opmerking, die nodig is, om later misverstand te vermijden: taaldaden kunnen ook *onvoltooid* zijn, d.w.z., dat zij enkel tot een min of meer duidelik „in gedachte spreken" voeren, zonder dat de spraakorganen in werking treden, en zonder dat dus van een „hoorder" in de eigenlike zin des woords sprake kan zijn. Toch zal ook in dat geval, eveneens als dat bij de voltooide taaldaad geschiedt, de „spreker" zelf (wij zouden hier eigenlik „denker" moeten zeggen) tevens als „hoorder" optreden. Weliswaar komen er nu geen geluidstrillingen tot stand, die zijn gehoororganen prikkelen en zo tot nieuwe geestesverschijnselen voeren, maar toch vormt zich een *bovenbewust* gehoorsbeeld, dat van het ogenblik van zijn ontstaan af een zekere invloed op de overige geestesinhoud uitoefent, die geheel van dezelfde aard is als bij een voltooide taaldaad, alleen vrij wat zwakker, en dus ook moeiliker te bestuderen. Zeer duidelik is dat verschijnsel waar te nemen, als men „in gedachte" een versje, een spreuk of iets dergelijks opzegt: men *hoort* als het ware een inwendige stem, die de woorden van het versje of de spreuk op een bepaalde toon en met een bepaalde snelheid uitspreekt, en (als wij er voldoende aandacht aan geven) ook een duidelik herinneringsbeeld nalaat. Ook bij een dergelijke taaldaad kan dus van een *oorzaak* en een *gevolg* of *uitwerking* van dat gehoorsbeeld, en dus van een spreek- en een hoorbetekenis gesproken worden. Wij zullen in het volgende dergelijke onvoltooide taaldaden als „woordgedachten" aanduiden, in onderscheiding van

andere bovenbewuste voorstellingskomplexen (als b.v. de bewegende hond van zoëven), waarbij geen woordbeelden op de voorgrond treden.

§ 6. Wij hebben in het voorgaande herhaaldelik gesproken van „geestesverschijnselen" of „geestelike verschijnselen", die op een of andere wijze als „een geheel", „een groep" of „een komplex" waren te beschouwen, zonder nader aan te duiden, welke verschijnselen of verschijnselengroepen wij eigenlik bedoelden. Het ogenblik is nu gekomen, daarover iets meer te zeggen.

In de eerste plaats merken wij dan op, dat de *herinneringsbeelden,* die wij van onze vroegere ervaringen bewaard hebben, meestal bêstaan uit een aantal onderdelen, die steeds weer op dezelfde wijze en in dezelfde onderlinge samenhang in ons bovenbewustzijn treden, wanneer één dier onderdelen, onverschillig welk, in het geheugen wordt geroepen. Als kind heb ik eens een klein meisje van een hoge schommel zien vallen, en de herinnering aan het *gehele* voorval (de voorstelling van het vallende, en daarnà beweginglоos liggen blijvende kind, de gil van het meisje en onmiddellik daarop het geschreeuw en haastig toelopen der omstanders, mijn eigen schrik en ontsteltenis, enz., enz.) komt mij voor de geest, als ik wild zie schommelen, of van „Kraantjelek" (daar had het ongeluk plaats) hoor spreken, of door een andere aanleiding aan het gebeurde terugdenk. Een dergelijk samengesteld herinneringsbeeld nu zullen wij een „herinneringsbeeldkomplex" noemen, en wel, zolang het bovenbewust is een „bovenkomplex" en in het tegenovergestelde geval een „onderkomplex", waarbij evenwel dadelik vooropgesteld zij, dat er tussen beide gevallen een graduele overgang bestaat, en dat een onderkomplex „diep" of „minder diep" in het onderbewustzijn kan liggen, met welke figuurlike uitdrukking wij natuurlik enkel bedoelen, dat het ene herinneringsbeeld veel gemakkeliker in het bewustzijn kan gebracht worden dan het andere.

Behalve bij dergelijke min of meer samengestelde *herinneringen,* zullen wij de termen „beeld" en „(beeld)-komplex" ook bezigen, om een min of meer samengestelde *voorstelling* aan te duiden, die iemand zich van een voorwerp, een persoon of een gebeurtenis kan vormen, ook al heeft hij nooit zulk een voorwerp gezien of zulk een voorval bijgewoond. Een dergelijk „voorstellingsbeeld" of „voorstellingskomplex" treedt, evenals dit met een herinneringsbeeld of een herinneringskomplex het geval is, nadat het zich eenmaal

heeft gevormd, steeds *in zijn geheel* en *op dezelfde wijze* in het bewustzijn, ofschoon meestal iets minder scherp dan herinneringen. En ten slotte zullen wij de ieder ogenblik in onze geest ontstaande nieuwe bewustzijnselementen, *die in onmiddellik verband staan met de inwerking van de buitenwereld door tussenkomst van onze zintuigen,* eveneens door dezelfde termen aanduiden, en dan van „waarnemingsbeelden" en „waarnemingskomplexen" spreken, en wel van boven- of onderkomplexen en beelden, alnaarmate zij gemakkelik reproduceerbaar zijn of niet. Een geschikt voorbeeld, om daaraan het onderscheid tussen een boven- en een onderwaarnemingskomplex te toetsen, is de ervaring, die wij alle wel eens zullen hebben gehad, als wij in de lektuur van een mooi boek verdiept waren, terwijl er om ons heen gepraat werd. Wij *horen* dan wel de stemmen, maar *verstaan* geen enkel woord, en wanneer men ons een ogenblik later ondervroeg, zouden wij wellicht geen der gesproken woorden kunnen herhalen, terwijl wij toch met grote stelligheid zouden kunnen verklaren, *dat* er gesproken is. Maar soms gebeurt het dan wel, dat midden in onze ingespannen lektuur onze aandacht wordt getrokken door een bepaald woord, dat in ons bijzijn werd gesproken (misschien werd onze naam genoemd of zo iets), en plotseling beginnen wij te verstaan, wat er gezegd wordt, tot over een poosje onze roman ons weer zó sterk „te pakken heeft", dat het stemmengerucht weer buiten ons bovenbewustzijn is getreden, en enkel „onderwaarnemingen" bij ons teweegbrengt.

Het voorgaande samenvattende, hebben wij dus dezelfde twee termen „beeld" en „komplex" op *drie* rubrieken van psychiese verschijnselen toegepast, n.l. op de *waarnemingen,* de *herinneringen* en de *voorstellingen,* terwijl wij in ieder dier gevallen het boven- van het onderbewustzijn hebben onderscheiden, waaruit strikt genomen *twaalf* verschillende mogelikheden voortvloeien.

Het is dan ook zeker niet gemakkelik zich met het juist gebruik dezer termen (die in onze volgende uiteenzettingen telkens weer gebezigd zullen worden) vertrouwd te maken, en wij raden de lezer daarom sterk aan, zich door het bedenken van eenvoudige voorbeelden in het gebruik dier termen te oefenen. Om deze oefening gemakkeliker te maken volge hier een enkel lijstje van zodanige voorbeelden:

onderwaarnemingsbeeld: een enkel tikje van de klok in de huiskamer, waar wij zitten te praten of te lezen;

onderwaarnemingskomplex: een voorbijganger, die in een drukke straat binnen mijn gezichtskring treedt, zonder mijn aandacht in het minst te trekken;

bovenwaarnemingsbeeld en -komplex: als de beide voorgaande voorbeelden, maar nu voor het geval ik met aandacht naar het tikken van de klok luister of de bewuste voorbijganger aankijk;

onderherinneringsbeeld: de gil van het meisje uit mijn verhaal van zoëven, op een ogenblik, dat ik aan de hele historie niet denk en in lang niet gedacht heb;

onderherinneringskomplex: mijn herinnering aan het hele drama onder dezelfde omstandigheden;

bovenherinneringsbeeld en -komplex: de enkele gil of de gehele schommelhistorie, zoals zij op het ogenblik, dat ik dit schrijf, mij voor de geest staan;

ondervoorstellingsbeeld en -komplex: de kloktik en de voorbijganger uit mijn beide eerste voorbeelden, maar nu voor het geval, dat ik er van droom;

bovenvoorstellingsbeeld: stel u zo duidelik mogelik voor, lezer, dat ge in een absoluut ledige en duistere ruimte zweeft, en er plotseling in het midden van uw gezichtsveld één scherp lichtpunt verschijnt en verdwijnt;

bovenvoorstellingskomplex: laat nu in uw gedachten dat lichtpunt zó bewegen, dat het langzaam en netjes aan het duistere firmament uw naam schrijft.

Als gemeenschappelike benaming voor de twaalf hier besproken kategorieën van bewustzijnsinhouden (er zijn ook andere!) zullen wij in het volgende de term *„gewaarwordingen"* bezigen.

§ 7. Beschouwen wij nu een gewaarwordingskomplex wat nader, dan blijkt, dat het vaak, hetzij in zijn geheel, hetzij wat zekere onderdelen betreft, een zekere *gevoelswaarde* heeft: het doet ons „aangenaam" of „onaangenaam" aan, of, gelijk men in de psychologie pleegt te zeggen: het is „positief" of „negatief geladen". Wat nu met termen als „aangenaam" en „onaangenaam" zo ongeveer bedoeld wordt, zal ieder lezer ongetwijfeld uit het gewone spraakgebruik bekend zijn, maar voor de fijnere onderscheidingen, die in grensgevallen nodig zijn, is deze, op innerlike waarneming berustende kennis niet voldoende en moet een voor

derden waarneembaar kenmerk van „positieve" of „negatieve" komplexlading (ev. beeldlading) worden gegeven. Dat kenmerk nu ligt juist in de *invloed,* die door het komplex in kwestie op de overige geestesinhoud van het betrokken individu wordt uitgeoefend, altijd, voorzover die invloed zich naar buiten, hetzij door gelaatsuitdrukking, gebaar of woord, hetzij door bepaalde handelingen, openbaart. In alle normale, gemakkelik te onderscheiden gevallen n.l. konstateren wij, dat een „aangenaam" komplex het individu prikkelt tot handelingen, die dat komplex *versterken* en een „onaangenaam" tot handelingen, die het *verzwakken.* Een enkel voorbeeld moge voldoende zijn, om deze, misschien wat abstrakt klinkende onderscheiding te verduideliken.

Het eenvoudigste voorbeeld is in dit geval zeker wel een *pijn*-gewaarwording, zoals die b.v. ontstaat, als ik een brandende lucifer bij ongeluk te lang in de hand houd (bovenwaarnemingsbeeld). Deze pijngewaarwording n.l. prikkelt mij onmiddellik tot een, met grote snelheid ten uitvoer gebrachte beweging: ik werp de lucifer weg en spring misschien tegelijkertijd achteruit (laten we gemakshalve veronderstellen, dat de ramp zich in de tuin en niet in de huiskamer afspeelt, daar anders misschien de opkomende gedachte aan brandgevaar de zaak nog gekompliceerder zou maken, dan ze reeds is). Bij deze enkele uitwerking van mijn pijnervaring blijft het intussen niet. Immers, gelijk de Duitser zegt: „Eine gebrannte Katze scheut das Feuer", en ik zal denkelik in het vervolg wat voorzichtiger met lucifers omspringen. M.a.w.: de pijngewaarwording prikkelt tot handelingen, die de strekking hebben, herhaling der gewaarwording en dus versterking van het komplex te *voorkomen,* en werkt tegelijkertijd *remmend* op handelingen van tegenovergestelde strekking. Bij een, in de gewone zin van het woord, aangenaam komplex heeft het tegenovergestelde plaats: de *aangename* gewaardwording (b.v. die van een koele dronk in een dorstige keel) prikkelt tot handelingen, die de strekking hebben, de gewaarwording te versterken (dus tot drinken in dit geval), en oefent een remmende invloed uit op tegengesteld gerichte handelingen, en het zal de lezer zeker niet moeilik vallen, deze opmerkingen aan tal van voorbeelden, hetzij van waarnemingen, hetzij van voorstellingen of herinneringen, te toetsen. Belangrijk is het, daarbij op te merken, dat bij de eerste soort van gewaarwordingen meestal de *prikkelende,* bij de twee laatste daarentegen de *remmende* werking

op de voorgrond treedt. En voorts, dat volkomen gelijksoortige gewaarwordingen geheel verschillende gevoelswaarden kunnen bezitten, al naarmate zij tot het ene of tot het andere komplex behoren.

Dit alles is echter de hoofdzaak niet. Die is hierin gelegen, dat wij voor de onderscheiding van „aangename" en „onaangename" gewaarwordingen niet enkel meer op de *innerlike* waarnemingen (die ons, streng genomen, alleen onze eigen psychiese ervaringen op het ogenblik, dat wij die beleven, doen kennen) zijn aangewezen, maar dat wij daarvoor een *uiterlik* kenmerk hebben in de plaats gesteld: een komplex is *positief* geladen, indien het individu blijk geeft van de neiging, het te versterken, en negatief in het tegenovergestelde geval.

Een andere vraag is natuurlik, hoe wij in gegeven omstandigheden kunnen te *weten* komen, welke beelden of beeldkomplexen prikkelend of remmend op een bepaalde handeling van onze proefpersoon hebben gewerkt: dat kan dikwijls moeilik genoeg zijn, vooral indien het onderkomplexen betreft, maar de *richting*, waarin wij die te zoeken hebben, is door de zoëven opgestelde algemene regel altans aangegeven.

§ 8. Keren wij na deze meer algemeen psychologiese uitweiding tot de eigenlike signifika terug, en passen wij de in het voorgaande gemaakte onderscheidingen op de spreek- en hoorbetekenis van een taaldaad toe, dan merken wij in de eerste plaats op, dat in de door de beide termen aangeduide geestesverschijnselen gemeenlik een aantal beelden en beeldkomplexen van zeer uiteenlopende gevoelswaarde optreden, en dat het uit signifies oogpunt van belang is, deze „beeldinhoud" en haar „lading" te onderzoeken, en vooral, spreek- en hoorbetekenis in dit opzicht met elkander te *vergelijken*. Beschouwen wij daartoe nog eens de in de aanvang van dit hoofdstuk tot voorbeeld gekozen gedachtewisseling tussen tramkondukteur en passagier, en wel meer in het biezonder het tweede bedrijf van het stuk: het antwoord van de passagier. Als deze de naam van de halte, waar hij wil afstappen, uitspreekt (laten we hem maar weer laten zeggen: „Leidsche plein"!), dan zullen de *hoofdelementen* van de beeldinhoud van de *spreek*betekenis dier taaldaad waarschijnlik wel zijn: het gehoorsbeeld van de zoëven gedane vraag, het gezichtsbeeld van de vragende kondukteur, dat van het Leidsche plein, het gehoorsbeeld van het woord, dat hij op het punt staat, uit te spreken, en ten slotte het denkelik meer samen-

gestelde komplex, dat betrekking heeft op de verdere bestemming van de passagier (hij gaat misschien wel naar de komedie?), en dat hem denkelik ook vóór de vraag van de kondukteur reeds min of meer omlijnd voor de geest zweefde. Wij willen dit laatste het *doelkomplex* noemen.

En nu de hoorbetekenis van dezelfde taaldaad? Wij zullen nu maar niet al te fijn uitpluizen, en dus de uitwerking, die de waarneming van het door hemzelve uitgesproken woord op de geestesinhoud van de trampassagier heeft, buiten rekening laten (mochten wij dit deel der spreekbetekenis van een taaldaad soms nog eens ter sprake willen brengen, dan zullen wij die uitdrukkelik als de „zelfhoorbetekenis" aanduiden), en vragen ons dus alleen af, welke *beelden,* respektievelik beeld*komplexen* voornamelik in het bovenbewustzijn van de kondukteur optreden, als hij de gewichtige mededeling „Leidsche plein" verneemt. Ook daartoe behoort ongetwijfeld eveneens een bepaalde voorstelling van het Leidsche plein in kwestie, en de gehoorsbeelden van vraag en antwoord, maar overigens is de bedoelde beeldinhoud bij de kondukteur heel anders dan bij de spreker: in plaats van het gezichtsbeeld van de kondukteur staat bij de laatste het gezichtsbeeld van de passagier in het centrum van de aandacht, en het doelkomplex (dat bij *iedere* handeling, en dus zowel bij spreken als bij luisteren een rol speelt) is hier geheel anders: de kondukteur immers wil enkel weten, waar hij moet afbellen, en neemt zich nu voor, dat zo aanstonds te doen, als de genoemde halte bereikt is. En al hebben wij ons tot nu toe nog niet met de ontleding van het psychies verschijnsel, dat men als „een voornemen" aanduidt, bezig gehouden, zoveel zal na het voorafgaande toch wel duidelik zijn, dat ook dit begrip een komplex van verschillend geladen beelden omvat, die op het verdwijnen en verschijnen van weer andere beelden invloed uitoefenen. En ook, dat tussen de hoor- en spreekbetekenis van een taaldaad, wat de *beeldinhoud* betreft, in het normale geval vrij veel overeenkomst kan bestaan, maar dat de *gevoelswaarden* („ladingen") in de meeste gevallen bij spreker en hoorder sterk uiteenlopen. Om dit laatste goed in te zien hebben wij in het oog te houden, dat die lading in hoofdzaak afhankelik is van de *overige* geestesinhoud van de betrokken persoon, en dat juist in dat opzicht tussen spreker en hoorder gewoonlik zeer grote verschillen bestaan.

De ruwe schets, die wij hier van het verloop van een vrij simpele

taaldaad hebben gegeven, moet vooral niet opgevat worden als een model van signifies onderzoek! Daartoe zou zeer zeker heel wat anders vereist worden dan de vage en algemene beschouwingen, die wij over een denkbeeldige taaldaad van een denkbeeldige tramkondukteur en zijn wederpartij hebben gehouden, beschouwingen, waarbij wij in hoofdzaak gesteund hebben op de ervaringen, op het gebied der redelike verstandhouding, die wij bij de gemiddelde lezer hebben verondersteld. Neen, de signifika is geen beschouwende, maar een *waarnemende* en zelfs een *proefnemende* wetenschap, en daarom spelen bij een eigenlik gezegd signifies onderzoek (dat altijd op een bepaalde taaldaad of een bepaalde groep van taaldaden betrekking moet hebben) laboratoriumproeven en (waar het massaverschijnselen betreft) statistiese berekeningen de hoofdrol. Zover echter strekt het „doelkomplex" van schrijver dezes zich niet uit, en daarom zal hij zich ook in het volgende wel eens meer een beroep op de innerlike ervaring van de lezer moeten veroorloven, al kan dat strikt genomen niet gans en al door de signifiese beugel!

§ 9. Onder de beelden, die in een spreek- of hoorkomplex (deze kortere uitdrukking zullen wij in het vervolg bezigen in plaats van: de spreek-en-hoor-betekenis-van-een-taaldaad, voorzover de spreker-of-hoorder zelf betreft) een belangrijke plaats bekleden, behoren zowel in het boven- als onderbewuste deel de *woordbeelden*, en wel natuurlik in de eerste plaats de (boven-)beelden van die woorden, die in de taaldaad tot uitdrukking worden gebracht, en het zal, alvorens wij tot een zekere indeling der taaldaden in verschillende groepen over kunnen gaan, nodig zijn, op die woordbeelden, of liever op de rol, die zij in de bedoelde komplexen vervullen, wat nader in te gaan.

Beginnen wij daartoe met een spreekkomplex, en denken wij eens aan taaldaden van wat wijder strekking en groter belangrijkheid, dan die wij in de tot nu aangehaalde voorbeelden hebben beschouwd. Aan een wetenschappelike redevoering b.v.

Het spreekt wel vanzelf, dat wie over een wetenschappelik onderwerp een rede wil houden, vooraf zijn gedachte zal laten gaan, over hetgeen hij zich voorstelt, aan zijn hoorders mede te delen, en dat hij, al sprekende, zich voortdurend inspant, de herinneringsbeelden aan deze voorbereidingsarbeid levendig te houden, en dus zijn aandacht niet uitsluitend te bepalen bij de volzin, die hij bezig is uit te spreken, maar ook bij hetgeen hij voornemens is, daarop

in de gang van zijn betoog te laten volgen. Misschien staat de volzin, die hij reeds voor een gedeelte heeft voltooid hem volstrekt nog niet volledig voor de geest, maar zeker zullen toch reeds enkele woorden, die in het latere gedeelte van die volzin zullen moeten voorkomen, in het bovenbewustzijn van de spreker zijn getreden. En niet alleen die woordbeelden, maar ook die van min of meer zinverwante uitdrukkingen, waaruit nog een keus zal moeten worden gedaan. Dit heeft dan een zekere aandachtsverdeling tengevolge, die bij een moeilik en ingewikkeld gedeelte van de uiteenzetting soms zover kan gaan, dat de spreker het gevoel krijgt, alsof twee geheel verschillende personen in zijn geest aan het werk zijn: één, die rustig (of misschien ook wel minder rustig, want er is wel eens haast bij de zaak!) bezig is, de *eerstvolgende* zin gereed te maken, zowel wat de woordenkeus, als wat de intonatie betreft, en een tweede, die niet anders doet, dan de volzin, die nummer één hem zoëven heeft voorgezegd, met de voorgeschreven snelheid en stemverheffingen uit te spreken: een „souffleur" en een „uitvoerder" als het ware. Die aandachtsverdeling is natuurlik niet altijd even sterk en bewust, maar ik herinner mij toch b.v. heel duidelik, dat ik eens bij het houden van een voordracht „mijzelf" hoorde zeggen: „op dit punt hoop ik aan het slot van mijn rede nog eens terug te komen", en dat de souffleur in mij daarbij de opmerking maakte: „lieve hemel, als ie dat zo aanstonds dan maar niet vergeet!" of zo iets. Of „ie" dat inderdaad later vergeten heeft, of er door zijn souffleur nog tijdig aan is herinnerd, kan ik heus niet meer navertellen, maar dàt er in het bovenbewustzijn van een „redevoerder" dikwijls heel wat zonderlinger „terzijdes" klinken, dan dat van zoëven, zal, denk ik een ieder, die dat werk wel eens bij de hand heeft gehad, kunnen beamen. En denkelik zullen er ook maar weinige onder mijn lezers zijn, die nooit als scholier bij het opzeggen van hun les met inspanning naar een werkelike souffleur hebben geluisterd, en met veel overleg hebben getracht, uit de weinige en halfverstane woordflarden, die tot hen doordrongen, een draaglik klinkend antwoord te konstrueren, en dat vereist dan toch ook een sterke mate van aandachtsverdeling, waarvan (als alles goed gaat tenminste) naar buiten niemendal blijkt.

Welnu, uit tal van waarnemingen en overwegingen is met zekerheid afgeleid, dat ook bij het gewone spreken, zelfs al geschiedt het

nog zo snel en levendig, een dergelijke splitsing van het geestesprocès in twee delen plaats vindt, die men ruwweg als het voorbereidend en het uitvoerend bestanddeel zou kunnen aanduiden. Het enige verschil met onze voorbeelden van zoëven is, dat in den regel alleen het tweede bestanddeel van het spreekkomplex bovenbewust, en het „voorbereidende" deel daarentegen onderbewust is, en dus enkel door een krachtiger zelfbezinning dan de gewone, in de herinnering kan worden teruggeroepen. Niettegenstaande deze moeilikheid echter is men er toch in geslaagd, omtrent de samenstelling van zulk een (voorbereidend) onderspreekkomplex iets naders te weten te komen. En van dat nadere is voor ons doel vooral de vraag van belang, welke *woordherinneringsbeelden* in dat onderkomplex optreden, een vraag, die in het nauwste verband staat met de onderscheiding van de z.g. (signifiese) *taaltrappen.* Maar daarover iets in een volgende paragraaf.

§ 10. Wie om hulp roept, of een kreet van schrik of pijn slaakt, brengt zijn spraakorganen in werking onder de rechtstreekse (of nagenoeg rechtstreekse) invloed van sterk geladen komplexen, die *geen* woordbeelden bevatten, maar als de voorzitter van een deftige vergadering het heeft over „het amendement van de geachte afgevaardigde van Z", dan zijn hem denkelik de bewoordingen van het bedoelde amendement en de naam van „de geachte afgevaardigde" tijdens het uitspreken van die woorden, altans gedeeltelik, bewust. En ook de leden van de vergadering, voorzover zij altans de diskussie met volle aandacht volgen, zullen in de regel èn aan die bewoordingen èn aan die naam min of meer bewust denken. M.a.w. de beelden der gebezigde woorden zijn niet *rechtstreeks* met de (positief of negatief) geladen komplexen verbonden, die de spreek- of luisterhandeling in gang gezet hebben (het doelkomplex), maar *door tussenkomst van andere woordbeelden.* Minder gemakkelik dan bij het gebruik van uitdrukkingen als de zoëven genoemde, zijn deze tussenschakels tussen doelkomplex en einduitdrukking van de taaldaad te onderkennen bij het gebruik van woorden als „netvleugeligen", „arbitrageclausule", of „het getal π", om maar eens naar verschillende gedachtegebieden te grijpen. Immers, het al of niet optreden van die tussenschakels, zal, behalve van de gebruikte uitdrukkingen en van de wijze, waarop die tot onze kennis zijn gekomen, ook van velerlei bijkomstige omstandigheden afhangen. Maar wel kunnen wij in het algemeen zeggen, dat het bedoelde

verschijnsel sterker en veelvuldiger zal voorkomen bij het gebruik van woorden, waarvan ons de betekenis oorspronkelik door anderen (ouders, onderwijzers, vakgenoten) uitdrukkelik is *medegedeeld,* dan bij die, welke wij (en dan wel meestal in de kindsheid) door het gebruik hebben leren kennen, en *deze* onderscheiding is het nu juist, waarop de zoëven genoemde term „taaltrappen" betrekking heeft. Wij rekenen daarbij n.l. die woordbeelden, die rechtstreeks aan voorstellingen van niet-taalkundig karakter zijn verbonden (en dat zijn dan meesttijds de „jeugdwoorden", waarop wij zoëven doelden) tot de eerste of *grondtaaltrap,* en duiden de woorden, waarop deze beelden betrekking hebben, als *grondwoorden* aan, terwijl dan de woorden, waarvan ons de betekenis in grondwoorden is medegedeeld, de tweede taaltrap vormen, enz. Het zal zeker wel geen betoog behoeven, dat een nauwkeurige en konsekwent doorgevoerde afbakening van de verschillende taaltrappen, waarin iemands gehele woordbeeldenvoorraad in theorie te verdelen zou zijn, absoluut onmogelik is, en dat bovendien een woordbeeld door veelvuldig gebruik onafhankelik kan worden van de tussenschakels, waaraan het oorspronkelik was verbonden. Dat alles neemt echter niet weg, dat de bedoelde onderscheiding dikwijls van veel gewicht bij het signifies onderzoek van een spreek- of hoorkomplex kan zijn. En vooral is dat het geval bij het bestuderen van de komplexen, die de *wiskundige* taal (hetzij van de beginnende leerling, hetzij van de vakman) begeleiden, want als algemene regel kunnen wij konstateren, dat de eigenlike vaktermen in de wiskundige wetenschappen meestal tot de hogere taaltrappen behoren, en dat daardoor bij het wiskundig spreken of denken het optreden van onder- en bovenbewuste „tussenschakels" als hierboven beschreven, zeer veelvuldig en in sterke mate voorkomt. Maar daaromtrent hoop ik nog gelegenheid te over te hebben, meer in biezonderheden te treden; eerst nog een enkele opmerking over taaltrappen in het algemeen en de wiskundige taaltrap in het biezonder.

Het zou m.i. zijn nut kunnen hebben (en er is met pogingen in die richting reeds een begin gemaakt), de gehele taal, niet van een persoon, maar van een groep of een volk, stelselmatig in taaltrappen te verdelen, waarbij dus eerst een betrekkelik klein aantal algemeen bekende en „intuïtief" begrepen woorden tot „grondwoorden" zouden worden gestempeld, vervolgens een tweede taaltrap zou worden opgebouwd door middel van definities of omschrijvingen,

uitsluitend uit „grondwoorden" bestaande, enz. Dat spelletje zou men natuurlik naar believen kunnen voortzetten, en woorden als „elektriese potentiaal", „logarithme", of „prismoïde" zouden dan misschien wel in een tiende of twintigste taaltrap een plaatsje vinden. Dat „spelletje", wij zeiden het reeds, zou voor sommige doeleinden, voornamelik van filosofiese aard, niet geheel zonder nuttigheid zijn, maar daarbij zou toch nooit uit het oog mogen worden verloren, dat het maar een „spelletje", d.w.z. een kunstmatig opgebouwd systeem zou wezen, waarmede wij de echte, levende taal, zoals zij door deze of door gene wordt gesproken, zouden kunnen *vergelijken*, maar waar die levende taal toch nooit geheel aan zou kunnen *beantwoorden*. En in dezelfde zin van het woord is het gehele wiskundige systeem, voorzover dat naar vaste regels uit woorden en symbolen is opgebouwd, met alle respekt gezegd, niet anders dan een „spelletje", dat misschien verbazend veel nut kan afwerpen, maar toch niet verward mag worden met het wiskundig denkprocès, dat zich in geest van de *beoefenaar* dier wetenschap voltrekt! Als die „beoefenaar" (uit de eerste klas burgerschool of uit de hoogste regionen van de mathematiese „upper ten") zich bezig houdt met het oplossen van een wiskundig probleem, dan bewegen zich de woord- en andere beelden, waarin zijn denkprocès zich voltrekt, niet volgens de theoretiese regels, die hij uit de boeken heeft geleerd, maar volgens de nooit volledig na te speuren wetten, die de samenkoppeling en opeenvolging der psychiese verschijnselen regeren. Of, om het een beetje huiseliker uit te drukken: ook de fraaiste wiskundige redenering is uit *gissing* geboren, en het is vaak meer geluk dan wijsheid, als die gissingen bij nader inzien geen *ver*gissingen blijken te zijn geweest. Vandaar dan ook dat de ware wiskundestudie geen geheugenwerk is, maar *zelfdressuur*. Voor die zelfdressuur enige aanwijzingen te geven, is meer in het biezonder het doel van de volgende hoofdstukken.

HOOFDSTUK II.

Het Meetkundig of Syntheties denken.

§ 11. In het voorgaande hebben wij herhaaldelik gesproken van „woordbeelden", zonder er ons over uit te laten, of daarmede

gehoors- of gezichtsbeelden werden bedoeld, maar wie ook maar even gewoon is, zich rekenschap van zijn indrukken te geven, zal zeker hebben opgemerkt, dat *beide* gevallen zich kunnen voordoen, of juister uitgedrukt, dat een woordbeeld òf een zuiver gehoorsbeeld is (wat bij het gewone gesprek de regel vormt), òf een kombinatie van een gehoorsbeeld met een gezichtsbeeld, n.l. de voorstelling van het geschreven of gedrukte woord (bij het lezen b.v.). De derde mogelikheid, het binnen onze aandachtskring vallen van dergelijke woord*gezichts*beelden zonder gelijktijdige prikkeling van het overeenkomstige geluidsbeeld komt te zeldzaam voor, om er hier rekening mede te houden, zodat wij kunnen vaststellen, dat het woorddenken zowel met als zonder gezichtswoordbeelden geschieden kan, waarbij dit natuurlik even goed geldt voor de onder- als voor de bovenwoordbeelden. Zonder op deze aangelegenheid, waaromtrent reeds vele diepgaande psychologiese onderzoekingen geschied zijn, hier nader te willen ingaan, willen wij twee dingen opmerken: ten eerste, dat het denken over wetenschappelike onderwerpen bijna steeds *gemengd* woorddenken is (dus met medewerking der gezichtsbeelden), en ten tweede, dat er ten aanzien van de meerdere of mindere medewerking van de gezichtsbeelden in deze (of, zoals het technies wordt uitgedrukt: van de visuele sfeer) tussen de verschillende individuen zeer grote verschillen bestaan, die waarschijnlik op verschillen in aangeboren aanleg berusten. Vooral bij het wiskundig denken treden die individuele verschillen vaak zeer scherp aan den dag, zodat men zelfs wel eens beweerd heeft, dat de wiskundigen in „visuele" en „auditieve" te verdelen zouden zijn, waarbij dan de eerste soort meer aanleg voor meetkunde en de laatste meer aanleg voor algebra (in de ruimere zin van het woord) zouden vertonen. Dit mag nu wat overdreven zijn, zeker is, dat bij het *meetkundig* denken de gezichtsfeer een belangrijker rol vervult dan bij het denken over problemen van algebraies karakter, omdat in het meetkundig denken de woordbeelden ten nauwste verbonden zijn met die der z.g. meetkundige *figuren,* hetzij dan, dat deze gedurende de overdenkingen werkelik waargenomen, of enkel voorgesteld wordt, en dat dit den een veel gemakkeliker valt dan den ander. Dat ligt dan niet altijd aan de grotere of geringere scherpte en duurzaamheid van de gezichtsbeelden (het visuele *voorstellingsvermogen* en het visuele *geheugen),* maar ook en vooral aan het vermogen, gehoors- en gezichtsbeelden *tegelijkertijd vast*

te houden en met elkander in verband te brengen. Maar misschien is het praktieser, van het hierbedoelde „meetkundig denken" een eenvoudig voorbeeld te geven, dan onze algemene beschouwingen al te fijn uit te spinnen.

Stel, een jeugdig pionier op het moeilik gebied der planimetrie heeft voor huiswerk opgekregen: een driehoek te konstrueren, als de tophoek en de beide opstaande zijden gegeven zijn, maar hij tekent het ene kladje na het andere vol krabbels en driehoeken, tot hij het in wanhoop opgeeft, of door zijn moeder naar bed gestuurd wordt. Wat is er al die tijd in des pioniers hoofd omgegaan, en hoe komt het, dat hij dat vraagstukje, dat alle andere jongens van zijn klas „doodmakkelik" hebben gevonden en in een oogwenk opgelost, niet heeft kunnen meester worden? „Verregaande domheid", zal wellicht menig onsignifies lezer geneigd zijn, op de laatste vraag te antwoorden. Laten we in gedachte de kladjes van de arme jongen eens bekijken. En dan zien we in een oogopslag, waar de schoen hem heeft gewrongen: hij is bij de basis begonnen, inplaats van bij de tophoek, en is daardoor in een warnet van cirkeltjes en lijntjes verdwaald geraakt, waaruit hij vergeefs een uitweg heeft gezocht. Dom? Laten wij de kladjes wat nauwkeuriger bekijken. Daar zie ik telkens weer een keurig getekende proeffiguur, waar netjes en duidelik bij geschreven is: „gegeven: AB = de lijn *m*, BC = de lijn *n* en hoek ABC = hoek P", en dan volgen weer telkens nieuwe probeersels: bij A begonnen (onzalige gedachte!), dan een cirkel met *n* tot straal, en daarop dan ten einde raad maar een „B" gekozen, om de hoek P tenminste te kunnen afzetten, en aan het stuk *n* een plaatsje te geven. Maar dan kwam de C natuurlik niet behoorlik op de basislijn te liggen, en Jantje begon opnieuw, dan eens bij A, dan eens bij B, en dan weer bij allebei de uiteinden tegelijkertijd, die hij hoopte, per slot van rekening toch nog wel op de goede afstand te zullen krijgen. Ja, en als we de langzamerhand verwarder en verwarder wordende figurenrommel (want het kind was ten slotte doodop) nog eens onder de loupe nemen, zien we daarbij verscheiden malen geheel goed gekonstrueerde driehoeken, die echter scheef op de vooraf gekozen basislijn staan, en daarom door de jeugdige tobber niet als goede oplossingen van de vraag zijn herkend. Neen, zo héél dom was de leerling toch blijkbaar niet, maar een klein beetje dom kan misschien de leer*meester* zijn geweest, als hij niet heeft voorzien,

dat het uitsluitend voortekenen van driehoeken met *horizontale* basis en het invoeren van de naam „top" voor dat ene hoekpunt, dat *ten opzichte van de tekenaar* een biezondere stand heeft, een subjektieve faktor in de voorstelling van de leerling brengt, die voor teleurstellingen en verwarringen als deze de weg baant... Maar we zouden het over de onderbeelden hebben, die Jantje voor de geest zweefden, terwijl hij „op zijn huiswerk zat".

Die onderbeelden zijn blijkens de vele cirkels, die in de kladfiguurtjes voorkomen, grotendeels geen enkelvoudige gezichtsbeelden geweest, maar *bewegings*beelden of liever -beeldkomplexen, die vrij wat samengestelder van bouw zijn dan de eerste. En daarnaast en daarmede verbonden zijn woordbeelden opgetreden, die weer nieuwe gezichts- en bewegingsbeelden deden ontstaan, alles onder de prikkel van het toch zo sterk positief geladen doelkomplex: het beeld van de vurig verlangde driehoek ABC. Maar zoveel wiskundeonderwijs heeft Jantje toch wel blijkbaar genoten, dat het reeds diep tot hem is doorgedrongen, dat er niet alleen getekend, maar ook geredeneerd moet worden; vandaar, dat hij de gegevens zo netjes heeft gerekapituleerd. Woordbeelden (en wel ongetwijfeld gemengde woordbeelden) zijn dus zeker ook in zijn onder- en bovenbewustzijn opgetreden, maar als ik de papieren getuigen van het verloop dezer meetkundetragedie goed interpreteer, dan hebben de gezichtsbeelden het per slot van rekening toch gewonnen, en is het redeneren er een beetje bij ingeschoten! En dàt zal Jantje langzamerhand hebben af te leren, zal hij ooit een goed wiskundige worden.

Maar laten wij eerst eens de vraag onder de ogen zien, wat dat „wiskundig redeneren" toch eigenlik inheeft?

§ 12. Aan het slot van een vorig hoofdstuk hebben wij reeds opgemerkt, dat iedere wiskundige redenering „uit gissing geboren wordt", en het is mogelik, dat een enkele mijner lezers, die met de edele mathematika nu juist niet op de allerbeste voet staat, daarbij goedkeurend geknikt heeft, en gedacht: precies, dat heb ik ook altijd gezegd: die hele wiskunst is niemendal anders dan raadseltjes oplossen, en het doet me plezier, dat er nu eindelik eens een wiskundige is, die dat toegeeft! Maar die instemming zou ik toch van de hand moeten wijzen, en die lezer moeten verzoeken, te bedenken, dat geboren worden nog iets anders is dan volwassen zijn, en dat er nog heel wat gebeuren moet, eer zulk een gissing

tot een behoorlik brokje wiskunde is uitgegroeid, dat we niet alleen met gerustheid aan het papier durven toevertrouwen, maar dat we ook met klem zullen weten te verdedigen, als iemand aan de juistheid er van zou twijfelen. En het onderscheid tussen ons Jantje van zoëven en een ervaren wiskundige ligt misschien in hoofdzaak juist in het meerdere wantrouwen, dat de laatste ten opzichte van zijn eigen opwellingen koestert. „Second thoughts are best" behoort het devies van iedere wiskundige te zijn, want op die „second thoughts" komt het juist aan.

De zaak is n.l., dat bij degeen, die wiskundig tracht te redeneren (laten we hem voor 't ogenblik kortheidshalve als de „wiskundedenker" betitelen), behalve het reeds genoemde doelkomplex, nog een ander besef levendig moet zijn, en wel dit, dat zijn taaldaad aan bepaalde voorwaarden moet voldoen, of anders gezegd, dat zij in een bepaald schema moet passen, om de instemming van de vakgenoten te kunnen verwerven. Welke voorwaarden dat nu precies zijn, zal zeker geen enkel „wiskundedenker" precies kunnen aangeven, al zijn er velen geweest, van Aristoteles af tot de wiskundefilosofen van onze dagen toe, die het geprobeerd hebben, maar dat neemt niet weg, dat zich in de geest van ieder wiskundedenker langzamerhand een onderkomplex vormt, bestaande uit herinneringen aan geslaagde en aan mislukte pogingen om de bovenbedoelde instemming van andere wiskundedenkers te verkrijgen, dat een beurtelings *remmende* of *prikkelende* invloed op de zich voltrekkende taaldaad heeft, en dat bij de wiskundedenker van de *goede* soort haast even sterk geladen is als het doelkomplex zelf. Want dit mag hier zeker wel eens gezegd worden, dat wie zich verbeeldt, dat „wiskundedenken" een droge en saaie bezigheid is, waarbij, zoals men het veelal pleegt uit te drukken, uitsluitend „het verstand" een rol speelt, daarmede bewijst, dat hij van de eigenlike, levende wiskunde geen flauw idee heeft. „Wiskundedenken" is een sterk emotionele, ja soms hartstochtelike bezigheid, zij het dan ook een hartstochtelike bezigheid van een biezondere soort. En dit stellen we daarbij voorop: wiskundedenken geschiedt niet alleen met het hoofd, maar ook wel degelik met het hart, of, om het in onze nuchterder signifiese vaktermen uit te drukken: bij het wiskundedenken spelen de ladingen van *verschillende* onderkomplexen een veel belangrijker rol, dan dat bij andere denkvormen het geval pleegt te zijn. En daarbij vestigen

wij vooral de aandacht op het woordje „verschillende", want juist de verdeling van de gevoelslading over twee of meer komplexen is, naar de mening van ondergetekende altans, de meest kenmerkende trek van het wiskundedenken, en de meerdere of mindere gemakkelikheid, waarmede iemand zijn aandacht op een aantal komplexen tegelijk vermag te richten is een van de meest wezenlike bestanddelen van die geheimzinnige en vaak vurig begeerde „wiskundige aanleg", waarover wij reeds met een enkel woord gesproken hebben. Maar daarover later. Eerst de hoofdvraag, die wij ons gesteld hebben, en die in het voorgaande nog slechts zeer onvolledig beantwoord is: wat *is* wiskundedenken dan eigenlik, en wèlk schema, waarin dat denken moet passen, leeft in de geest („psychiese komplexverzameling" behoorden we hier eigenlik te zeggen) van de wiskundige?

Om bij het begin te beginnen, zou ik de lezer willen herinneren aan een der eerste lessen in de wiskundige denkvorm, die hij, als hij tenminste een rasechte Hollander is, in zijn jeugd ongetwijfeld heeft genoten: ik bedoel het bekende kinderspelletje van „alle vogels vliegen!" Hebben we niet allemaal indertijd met schitterende ogen om de tafel gezeten met de vurige wens, toch vooral de eerste te zijn, om de vingers omhoog te steken, als er „vogels" zouden vliegen, een doelkomplex, dat, naar mijn eigen herinnering te oordelen, soms zo sterk geladen was, dat onze armen ervan tintelden? En was het dan niet tegelijkertijd een geweldige inspanning, dat andere, remmende en regelende komplex levendig voor de geest te houden, dat verhoeden moest, dat we na de spreeuwen, de vinken en de mussen, ook de piano's of de oliebollen zouden laten vliegen? Van een „syllogisme" hadden we toen nog nooit gehoord, en het klassieke voorbeeld van die denkmachinerie, dat sedert een dikke twintig eeuwen door de filosofiese litteratuur spookt: „De mens is sterfelik, Sokrates is een mens, derhalve is Sokrates sterfelik", was zeker nog nooit tot onze toenmalige taaltrap doorgedrongen, maar de eerste grondslagen van een latere wiskundige, of als men liever wil, logiese denkvorm, werden toen toch reeds in onze kindergeest gelegd. Ik herinner me nog heel goed, dat vooral „mutsen" een zeer dankbaar objekt vormden, om er onze medespelers listiglik mee te laten „invliegen", want reeds op het horen van de eerste klank van dat verraderlike woordje sprong er bij de jeugdige syllogistelaren een elektriese geestesvonk naar het herinneringsbeeld „mussen"

over, vandaar op „vogels" en „vliegen", en prikkelde het doelkomplex „handen omhoog" gemeenlik zo sterk, dat de handen werkelik omhoog gingen, eer het nageseinde telegram: „stop! Het *zijn* geen mussen!" behoorlik was gearriveerd, en dan was de pret onbedaarlik, zowel bij het slachtoffer als bij de listeling.

Natuurlik is onze logies-wiskundige opvoeding daar niet bij gebleven, en hebben we sedertdien ook buiten de gezellige kring van de kinderfeestavonden met het syllogisme, zij het nog altijd zonder Sokrates, kennis gemaakt, en langzamerhand heeft zich in onze geest een zeer samengesteld komplex van taaldaadherinneringen gevormd, die alle een zekere vorm, een zeker rythme als het ware, gemeen hebben, en dat ook bij het gewone spreken van het dageliks verkeer een regelende invloed op onze taaldaden uitoefent. Ik zal dit komplex in het volgende als het „logiese onderkomplex" aanduiden, en nu de vraag onder de ogen zien, hoe uit dat logiese onderkomplex een „wiskundig bovenkomplex" kan voortkomen.

Want het is een lange weg, die van „alle vogels vliegen" naar de stelling van Pythagoras voert!

§ 13. Vergelijken wij daartoe in de eerste plaats de taaldaden, die in de school gebruikelik zijn, met die uit het dageliks leven, dan merken wij op, dat de bijbehorende doelkomplexen in beide gevallen sterk vêrschillen, ook al bestaat er ten aanzien van de gebezigde (lexikologiese) woorden overeenstemming. Als de winkelier tot het dienstmeisje zegt: „Zevenentachtig en drie maakt negentig, èn tien is 'n gulden", dan bevat zijn doelkomplex de levendige voorstelling van een beide partijen bevredigend procès van geld teruggeven, en denkelik ook die van het uit zijn gezichtskring verdwijnen van déze klant, om voor de volgende plaats te maken, zodat het „En u, juffrouw?" met de rekenkundige bewering van zo aanstonds misschien wel tot één taaldaad samensmelt. Heel anders staat het met de leerling, die moet uitrekenen, hoeveel honderd min tachtig is. Hij stelt zich ook voor, iemand te „bevredigen": zijn leermeester n.l., maar nu niet door hem enige geldstukjes te geven, maar door „het juiste woord op de juiste plaats" te doen horen, m.a.w., door zijn taaldaad te voltooien in overeenstemming met zijn, intussen door de schoolwijsheid uit de lagere klassen aanmerkelik versterkt logies onderkomplex. Of in gewoon Hollands (en dus 'n beetje oppervlakkig) uitgedrukt: het antwoord

moet „goed” en niet „fout” zijn, en dan is de zaak in orde. Natuurlik speelt datzelfde logiese onderkomplex ook bij de winkelier een rol, maar dat is dan niet meer de hoofdrol in het stuk, zoals dat het geval was, toen hij nog op de schoolbanken zat in plaats van achter de toonbank te staan.

Deze karaktertrek nu van het opzettelik schoolonderwijs, zoals die vooral in de taal- en rekenlessen aan den dag treedt, en die men het best als „abstraheren van de buitenschoolse werkelikheid” zou kunnen aanduiden, heeft tengevolge, dat altans een deel van dat logiese onderkomplex telkens weer in het bovenbewustzijn treedt, en dan de aan het onderkomplex verbonden gevoelslading als het ware met zich meevoert. Wij *weten* (en weten al heel lang!) dat zeven en drie tien is, niet alleen omdat wij het op school zo dikwijls hebben gehoord (herinneringsbeeld), maar vooral ook, omdat wij, gelijk het heet, „begrijpen, dat het niet anders kan”, een enigszins vage beeldspraak, waardoor wij uiting geven aan onze verwachting, een ieder, die een ogenblik mocht aarzelen, aan onze taaldaad zijn goedkeuring te hechten, gemakkelik tot andere gedachten te kunnen brengen. Wat dan ook meestal het geval is, of we zouden met een erg doorgewinterde signifikus te doen moeten hebben! Misschien vormt de tafel van vermenigvuldiging in het leven van het schoolkind wel het eerste voorbeeld van een woordenreeks, die door ieder volwassene op volkomen dezelfde wijze wordt gebezigd, en nimmer de minste tegenspraak uitlokt. Wat van de meeste woordenreeksen niet gezegd kan worden, of het zouden diepzinnige wijsheden als: „het is maar zo, als het is”, of: „een mens is maar een mens” en dergelijke moeten wezen.

Hoe staat het nu, om de hele rekenkundige schoolgeleerdheid maar met stilzwijgen voorbij te gaan, met de beginnende leerling in de meetkunde? Wat „begrijpt” deze gemeenlik, en op welke manier gaat dat „begrijpen” in zijn werk?

Alvorens die vraag te beantwoorden, één opmerking: begrijpen en begrijpen is twee. Wanneer wij van een gocheltoer of een ander buiten het gewone kader vallend verschijnsel zeggen, dat we „er niemendal van begrijpen”, dan geven we daarmede de halfbewuste wens te kennen, er meer van te weten. Er zoveel van te weten, dat het gevoel van verwondering over het plotseling verdwijnen van het konijntje plaats maakt voor een gevoel van herkenning van dat schijnbaar zo buiten-de-gewone-konijntjessfeer vallend ver-

schijnsel als iets doodgewoons. Als iets bekends, als een gewaarwordingkomplex, dat in hoofdtrekken overeenkomt met de millioenen herinneringskomplexen, die wij omtrent konijntjes en andere tastbaarheden om ons heen, in de loop van ons leven hebben verzameld, en die zich langzamerhand tot een geheel ànder onderkomplex hebben verenigd, dan dat, waarover we het zoëven hadden. Ik zal dàt komplex, waarvan geen *taaldaad*herinneringen, maar *bewegings*herinneringen de bouwstenen zijn, als het (ook aan de minstontwikkelde onder ons eigen) *fysiese* onderkomplex aanduiden, en mij daardoor het middel verschaffen, de twee soorten van begrip, waarop ik de aandacht wilde vestigen, van elkander te onderscheiden: een *natuurverschijnsel* begrijpen of niet begrijpen, wil zeggen, de waarneming ervan toetsen aan ons *fysies* onderkomplex, een *redenering* al of niet begrijpen sluit een toetsing aan ons *logies* onderkomplex in zich. Dat er in het dageliks gedachteverkeer ook wel eens van een begrijpen in nòg andere zin sprake kan wezen, doet hier minder ter zake: in de meetkundeles spelen in hoofdzaak *deze* vormen van geestelike bevrediging, die ik als een fysies of een logies begrijpen wil aanduiden, een rol. Een rol, wel te verstaan, waarin ook het logies of fysies *niet*-begrijpen een woordje meespreekt.

§ 14. Wij hebben reeds opgemerkt, dat het fysies onderkomplex, dat men ook zou kunnen aanduiden als onze ervaringskennis van de natuurverschijnselen, niet alleen uit gezichtsbeelden, maar ook, en wel hoofdzakelik, uit *bewegingsbeelden* bestaat, en het ogenblik is nu gekomen, de samenstelling van zulk een bewegingsbeeld (b.v. dat van de zich-naar-zijn-hok-begevende-hond uit ons voorbeeld in hoofdstuk I) nader te beschouwen. En dan merken wij al dadelik op, dat die samenstelling een grote overeenkomst vertoont met die van een bioskoopfilm. Immers, als wij ons die lopende of springende hond zo duidelik mogelik voor de geest trachten te halen, dan moeten wij ons van de verschillende standen, die het dier achtereenvolgens moet aannemen, om aan het bevel van zijn meester te voldoen, gezichtsbeelden vormen, die veel overeenstemming hebben met de vele honderden momentopnamen, waaruit een overeenkomstige kino-afbeelding zou bestaan. Het is waar, dat de visuele beelden in onze geest niet zo gemakkelik en nauwkeurig van elkander te onderscheiden zijn, als de filmplaatjes (om van de mogelikheid, ze te tellen, maar in het geheel niet te spreken), maar dat ligt

denkelik in hoofdzaak aan het grote aantal dier gezichtsbeelden en aan de snelheid, waarmede zij elkaar opvolgen. Want wij moeten niet vergeten, dat er voor het vormen van een bewegingsbeeld, evengoed als voor het waarnemen van een werkelike beweging, een zeker *tijdsverloop* nodig is, al is het dan ook in vele gevallen een biezonder kort tijdsverloop.

Vrij wat lastiger is echter de vraag te beantwoorden: hoe zijn die verschillende voorstellingen van de op elkander volgende standen van de hond aan elkander verbonden, zodat zij telkens, als wij ons de beweging opnieuw voor de geest halen, in volkomen dezelfde volgorde binnen onze aandachtskring verschijnen? Verscheidene proeven zijn reeds door de fysiologen, die zich meer in het biezonder met de studie van de gezichtszin bezighouden, gedaan, om dit „bindmiddel" tussen wat we de geestelike momentopnamen zouden kunnen noemen, te ontdekken, en zoveel is daaruit wel met zekerheid af te leiden, dat het (uiterst zwakke) spiergevoel, dat wij bij het bewegen van de oogbol ondervinden, daarbij een rol speelt, maar het rechte weet men er toch niet van. In ieder geval zijn die oogspiergewaarwordingen (die trouwens slechts met de grootste moeite en dan nog slechts zeer onvolledig in het bewustzijn kunnen worden gebracht) lang niet het enige verschijnsel, dat bij de vorming van een bewegingsbeeld te pas komt: naar het schijnt, heeft het ontstaan van de z.g. nabeelden, die onmiddellik na het waarnemen van een visueel beeld optreden en met de volgende gezichtswaarneming in een soort kontakt treden, er ook wat mede te maken, en een zeker vermoeidheidsgevoel, dat op iedere lichtwaarneming schijnt te volgen, evenzeer. Maar dit alles ligt niet alleen ver buiten het bestek van deze inleiding, maar grotendeels zelfs buiten dat van de signifika zelve. Immers het betreft hier verschijnselen, die wij niet, of altans slechts zeer gedeeltelik, door innerlike ervaring (of zelfwaarneming) kennen, maar wier bestaan wij enkel uit het resultaat (in dit geval: uit het tot stand komen van een bewegingsbeeld) kunnen afleiden. En het zijn nu juist dergelike verschijnselen, die door de reeds door ons gebezigde term „onbewuste" geestesinhouden worden aangeduid, en waarvan wij uitdrukkelik hebben beloofd, ze hier buiten bespreking te laten. Ik veroorloof mij daarom in dit opzicht enkel de simpele opmerking, dat wij ons wel een gezichtsbeeld zonder beweging, maar geen bewegingsbeeld zonder „momentopnamen"

kunnen vormen, zodat wij wel moeten aannemen, dat wij in onze herinneringsvoorraad de nodige bewegingsbeelden, waaruit ons fysies onderkomplex, altans ten dele, opgebouwd moet worden, kant en klaar aanwezig vinden. Maar dan zijn we er nog lang niet.

Om dat in te zien, hebben wij slechts te bedenken, dat het heel iets anders is of wij ons een *filmvoorstelling* van een bewegende hond voor de geest roepen, of de voorstelling van een echte, of, zoals men het noemt „driedimensionale" hond. En toch zijn de „momentopnamen" en hun geheimzinnige bindmiddelen, waar de oogfysiologen nog altijd naar zoeken, in beide gevallen dezelfde. Waarin zit dan het verschil?

Het is u ongetwijfeld niet onbekend, lezer, dat we eigenlik, ook al hebben we niet te diep in het glaasje gekeken, alle dingen dubbel zien? Behalve dan het voorwerp, waar we juist „naar kijken", zoals het heet, dat is dus het lichtgevend punt, waarvan de uitgaande lichtstralen precies in het midden van het netvlies onzer beide ogen (de „gele vlek") terechtkomen. Dàt ene voorwerp of deel van een voorwerp zien we *niet* dubbel, ja, we kunnen zelfs met de beste wil van de wereld geen onderscheid ontdekken tussen onze gezichtswaarneming van dat voorwerp met twee ogen of met één oog. Maar alle andere voorwerpen-of-delen-van-voorwerpen (ik zal maar zeggen „plekjes" om niet te wijdlopig te worden) in de ruimte zien we, *zonder er ooit op te letten,* dubbel, als we met twee ogen, en enkel, als we met één oog kijken. Dat is te zeggen, als we niet naar dàt „plekje", maar naar een ander „plekje" kijken. En eigenlik beschouwd, is ook dat weer niet helemaal waar, want de berekening leert, dat er een eigenaardige kronkellijn door de ruimte om ons heen loopt, de z.g. „heropteerkromme", waarvan we ook met twee geopende ogen, slechts een enkelvoudig gezichtsbeeld ontvangen, maar die schijnt voor de praktijk van het z.g. ruimtelik of stereokopies zien niet veel te betekenen. Maar van des te meer betekenis zijn in dat opzicht al die andere „plekjes" om ons heen, die we bij een bepaalde oogstand wèl dubbel zien, zoals we, *indien we ons daartoe moeite geven,* door innerlike waarneming kunnen konstateren. Want dit moeten we niet „uit het oog" verliezen, dat *in de regel* alleen de gezichtswaarnemingen van de gele vlek tot ons bovenbewustzijn behoren, en dus het stereoskopies zien grotendeels een onderbewust procès is, waarbij trouwens, gelijk we reden hebben om aan te nemen, ook vele en velerlei

*on*bewuste psychologiese verschijnselen te pas komen. Maar genoeg: het vraagstuk van het ruimtelik zien is, zowel van psychologies als van physiologies standpunt zó ingewikkeld en de oplossing ervan vertoont bij de huidige stand der wetenschap nog zóveel leemten, dat we er niet aan kunnen denken, het hier met enige volledigheid te behandelen, en we zullen ons dus tevreden moeten stellen met de wetenschap, dat tot de spreekbetekenis van het „allo, in je hok!" van pagina 1 een geweldig ingewikkeld en kunstig samenstel van lichtwaarnemingsherinneringen, oogspier-, halsspier-, lenskontraksie-, evenwichts- en andere gewaarwordingen met dito herinneringen (èn verwachtingen!) behoort, dat zich met een verbazende snelheid ieder ogenblik opnieuw vormt en vervormt, en de jager in staat stelt, de gehoorzaamheidsgraad van zijn viervoetige medewerker „in één oogopslag" te beoordelen!

§ 15. Maar keren wij tot de meetkundeles terug, waar een ander soort van wild wordt nagejaagd, dan dat, waarop Fidel of Bruno is afgericht: de vluchtende en vluchtige *aandacht* n.l., die nodig is, om de velerlei problemen op te lossen, waarvoor de school haar adepten pleegt te stellen, en vragen wij ons af, in welk verband de beide zozeer verschillende onderkomplexen, die wij in de voorgaande paragrafen hebben leren kennen, tot die aandachtsbepaling (of aàndachts*richting*) staan. Want dàt zowel het logiese als het fysiese onderkomplex met het vinden van de oplossing van het opgegeven werkstuk of het bewijs van de opgegeven stelling in het nauwste verband staan, zal na het voorgaande, wil ik hopen, de lezer wel duidelik geworden zijn: wij *zien* met ons geestesoog, al of niet ondersteund door onze werkelike ogen (en misschien ook door potlood en papier!) de verschillende figuren ontstaan, zich verplaàtsen, elkander bedekken of in elkander overgaan, die door de bewoordingen van de opgaaf rechtstreeks of middellik worden aangeduid. En tegelijkertijd begeleiden wij dat grasduinen in ons fysies onderkomplex, als ik het zo noemen mag, door een min of meer samenhangende en min of meer emotionele inwendige redevoering, die wij zo goed en zo kwaad als het gaat, met ons logies onderkomplex in harmonie trachten te doen zijn. Misschien heeft het noodlot ons beschoren, dat we een driehoek moeten konstrueren, waarvan de hoogtelijn, de zwaartelijn en de hoekdeellijn uit de top gegeven zijn, en dan zullen die drie techniese termen, als we tenminste onze meetkundeloopbaan tot dusver zonder

àl te veel ongelukken hebben afgelegd, ons ongetwijfeld allerlei figuren voor de geest roepen, die met het vroeger geleerde omtrent hoogtelijnen, zwaartelijnen en hoekdeellijnen in verband staan, en het is nu maar de vraag, of onze aandacht daarbij vallen zal op díe figuren en kombinaties van figuren, die zich tot een, door een „logiese" redenering begeleidbare keten laten aaneenvoegen, waarvan de gevraagde driehoek de laatste schakel vormt. Een beetje geluk moet er natuurlik bijkomen, maar louter geluk of blind toeval (zoals het voor de niet succèsvolle zoeker zo dikwijls schijnt, als hem eindelik de juiste oplossing wordt medegedeeld), is het toch ook niet. Zeker, wie al dadelijk begonnen is, de drie gegeven lijnsegmenten in hun onderling verband te zien, en bovendien bij ondervinding weet, dat cirkels en cirkelbogen vaak redding kunnen brengen, als onze moeilikheden met het begrip „hoeken" en „hoekgelijkheden" in verband staan, heeft een vrij wat betere kans dan zijn konfrater, die door de *evenredigheid,* die met de hoekdeellijn en de *gelijkheid,* die met de zwaartelijn in verband staat, geboeid is en daardoor allicht de algebraïese kant wordt opgedreven en gevaar loopt, in een warnet van vergelijkingen met drie onbekenden verstrikt te raken, tot hij geen vin meer verroeren kan. Maar wèlke van deze beide (of duizend andere mogelike) wegen onze gedachteassociaties zullen inslaan, hangt dàn toch maar in hoofdzaak (hoewel lang niet uitsluitend!) af van die geheimzinnige „mathematiese aanleg", waarover we reeds gesproken hebben. Dat moet wel zo zijn, want hoe het anders te verklaren, dat de een zoveel vaker dan de ander op een schitterende inval komt, en zich veel zeldzamer dan de ander vastwerkt? En die mathematiese aanleg schijnt zich op meetkundig terrein nu juist voornamelik te manifesteren in de meerdere of mindere gemakkelikheid, waarmede de „wiskundedenker" zijn aandacht over de genoemde onderkomplexen weet te verdelen en van het min of meer gemakkelik tot stand komen van associaties tussen deelkomplexen van die beide gebieden. Bij de meeste mensen n.l. treden de beide komplexen wel beurtelings, maar nimmer tegelijkertijd in het volle bewustzijn, of anders gezegd: een levendige ruimtevoorstelling en een scherpe redenering sluiten elkander gewoonlik uit. De (in wiskundige zin) gewone sterveling moet, wil hij een enkel stapje vooruitkomen op zijn moeilik pad, telkens en telkens weer dezelfde brokstukken-wiskundige-taal en dezelfde

brokstukken-meetkundige-beeldvorming herhalen en herstellen, eer het hem gelukt, die weerbarstige en ongelijksoortige geestesinhouden behoorlik in de pas te doen marcheren. En dàt schijnen de geniale meetkundigen, als een Apollonius, een Pascal of een Jacob Steiner nu juist met verbluffend gemak te hebben kunnen doen, en dáárin schuilt, naar mijn overtuiging, dan ook het grote geheim van hun virtuositeit op het terrein van de geometrie.

Een schrale troost, zal menig lezer misschien geneigd zijn te zeggen, wie het nu voor het eerst duidelik geworden is, waaròm hij geen Apollonius of Steiner is, en het ook nooit worden zal: wat helpt het de zieke, of de dokter hem al haarfijn kan uitleggen, wat hem eigenlik scheelt, als hij erbij moet voegen, dat er niemendal aan te veranderen valt: u hèbt nu eenmaal een zwak gestel! Wel, ik zou daarop willen antwoorden, dat mensen met een zwak gestel geen Karakoroems moeten bestijgen of poolreizen ondernemen, maar dat zij „op het vlakke veld" door voorzichtig overleg vaak oneindig meer kunnen bereiken dan een veel sterkere, die zijn krachten niet oordeelkundig aanwendt. Of, om het zonder beeldspraak te zeggen: het zijn lang niet altijd de meest begaafde leerlingen, die het meest bereiken, en door oefening en volharding kan een geringer aanleg tot op een belangrijke hoogte geneutraliseerd worden. Maar één voorwaarde moet daartoe zeker vervuld zijn: dat men zich van zijn eigen tekortkomingen op het betreffende gebied bewust zij. Een kennis, die men zich enkel door nauwkeurige zelfwaarneming (en door een *beetje* signifies inzicht!) kan verwerven.

§ 16. Er is veel getwist over de vraag, of de zuivere wiskunde als een zinledig woordenspel of als een nuttige en betekenisvolle wetenschap moet beschouwd worden, en die vraag hangt met de zoëven besproken associaties tussen ongelijksoortige bewustzijnsinhouden ten nauwste samen. Wij hebben het hierboven reeds opgemerkt: het wiskundig woorden- en symbolensysteem mag niet verward worden met het denkprocès, dat er aan ten grondslag ligt, of, gelijk men het tegenwoordig meestal uitdrukt: dat er door wordt *begeleid.* Zeker, dat systeem heeft iets kunstmatigs, iets willekeurigs, en de rekenmachines of de nog vernuftiger toestellen, die in de hogere wiskunde soms ter bekorting van tijdrovende herleidingen worden gebezigd, kunnen *tot op zekere hoogte* hetzelfde resultaat voortbrengen als de levende wiskundige zelf, en in dat geval kan toch moeilik van een *wetenschap* en van een *betekenis*

dier wetenschap gesproken worden: machines denken niet, willen niet en weten niet. Maar wie om die reden het wiskundig denkprocès zelf als zinledig en doelloos zou willen betitelen, zou daarmede even onrechtvaardig handelen als hij, die het nut van de machinefabriek zou willen ontkennen, omdat daar enkel machines *gemaakt* en niet (of het moet als proef zijn) *in werking gesteld* worden. Integendeel, aan dat denkprocès ligt een algemene doelstelling ten grondslag, die van wijder strekking is, dan die, welke door de meeste vakwetenschappen op zichzelf wordt beoogd: een doelstelling n.l., gericht op een, aan onze maatschappelike behoefte beantwoordende wisselwerking tussen onze verschillende geestesinhouden. Met andere woorden: het doel van de wiskunde is het denken zelf, of, gelijk de wiskunde-filosoof Brouwer het uitdrukt: het (in onze geest) maken van de „sprong van doel op middel" in het algemeen. Die doelstelling nu is van maatschappelike aard, en daarom valt het niet te ontkennen, dat de wiskunde rechtstreeks met de geesteswerkzaamheid der mensen als *maatschappelike* wezens in verband staat en dat haar ontwikkeling en beoefening onder de invloed van *maatschappelike* verschijnselen en stromingen staat. En dat zij allerminst, gelijk men eertijds vrij algemeen dacht, een samenstel is van z.g. „abstrakte", d.i. van alle menselike levensbehoeften en levensbedoelingen onafhankelike „waarheden". Een wiskundige formule is niet „waar" of „onwaar", maar kan enkel „juist" of „onjuist" genoemd worden al naar gelang zij met de woordassociaties, die in ons logies onderkomplex opgestapeld en gekonserveerd zijn, in overeenstemming is of niet. „Eén-en-één" is dáárom en alleen dáárom „twee", omdat wij Hollanders met het woordje „twee" gemeenlik nagenoeg hetzelfde plegen te *bedoelen* als met het woordenrijtje „één-en-één". M.a.w.: „twee" en „één-en-één" zijn, wat men in de gewone taalkunde noemt: *synonieme* of zinverwante uitdrukkingen. En evenmin als twee synonieme zegswijzen ooit volkomen *hetzelfde* effekt bij de hoorder kunnen teweegbrengen, evenmin zullen de uitdrukkingen „één-en-één" en „twee" in de taal van het dageliks leven *volkomen* verwisselbaar zijn, al gaat die verwisselbaarheid dan ook veel verder dan bij synoniemen als b.v. „vriendelik" en „goedmoedig" of „schepsel" en „sterveling", om eens een paar onwiskundige termen te noemen.

Het onderscheid nu tussen de ervaren wiskundige en de beginneling is uitsluitend gelegen in hetgeen die beide „juist" noemen, of

liever in hetgeen door hen als „juist" gevoeld wordt. En dat hangt blijkens het bovenstaande in hoofdzaak af van de bouw en de inhoud van hun beider logies onderkomplex. Waaruit onder meer volgt, dat het onbillik is, van die beginneling te verwachten, dat hij de taal van de ervaren wiskundige zal verstaan en zijn eigen gedachten in die taal zal kunnen uitdrukken. Een onbillikheid, waaraan *on*ervaren wiskundedocenten zich maar al te veel schuldig maken!

§ 17. Een der voornaamste moeilikheden, die de beginnende *meetkunde*leerling ondervindt, is hierin gelegen, dat zijn leermeester telkens van hem verlangt, dat hij allerlei dingen zal bewijzen, waarvan hij onmogelik kan inzien, dat zij enig bewijs behoeven. Dat twee driehoeken, wier hoekpunten samenvallen, elkander volkomen zullen bedekken, dat alle rechte lijnen, die in een plat vlak door het punt A getrokken kunnen worden, loodrecht staan op één bepaalde rechte, die dat vlak in A snijdt: op de „loodlijn" namelik, dat een cirkel door ieder zijner middellijnen in twee volkomen gelijke delen verdeeld wordt, e.d.m., is voor iedere leerling, die zich de bijbehorende figuur behoorlik voorgesteld heeft, vanzelfsprekend (en voor wie dat niet gedaan heeft, adakadabra!) En toch wordt van hem geëist, dat hij allerlei, in sommige gevallen uiterst ingewikkelde redeneringen zal volgen en navertellen, waardoor die, voor zijn gevoel eenvoudig onbetwijfelbare waarheden, zogenaamd „bewezen" worden. Ik voor mij tenminste herinner mij uit mijn schooltijd best, dat ik bij het vernemen van de uitdrukking „open deuren intrappen" altijd aan de meetkundeles dacht! En zo zal het, denk ik, de meeste van mijn lotgenoten wel gegaan zijn.

Deze moeilikheid nu spruit eenvoudig voort uit het verschil in betekenis, die aan het werkwoord „bewijzen" in de wiskunde en in de levende (in de zin van doelbeogende of „voluntaristiese") taal eigen is. In de laatstgenoemde taal toch betekent „bewijzen": iemand (of misschien zelfs „ieder verstandig mens") *overtuigen,* d.i., zijn aanvankelik verzet tegen hetgeen we beweerd hebben, door woorden of handelingen doen verdwijnen en voor instemming plaats maken. En van dat alles is bij een wiskundig bewijs (dat dan ook liever „afleiding" moest genoemd worden) geen sprake. De vraag is niet, of iemand aan het samenvallen van die driehoeken twijfelt of niet, maar enkel, of de bedoelde eigenschap *reeds opgesloten ligt* in hetgeen in de voorafgaande paragrafen van het boekje omtrent

driehoeken is gezegd. De leerling, die dat onderscheid in betekenis heeft begrepen, zal misschien het hem als huiswerk opgegeven bewijs nog wel niet dadelik kunnen vinden, maar er toch op een praktieser (en denkelik ook prettiger) manier naar zoeken, dan anders het geval zou zijn. Zoeken namelik *in zijn boekje*, of, als hij dat voldoende onder de knie heeft: in zijn logies onderkomplex. En het geeft aan de meeste leerlingen, die het betrekkelik werktuigelike, dat aan dat „afleiden" van meetkundige stellingen uit voorafgaande eigen is, hebben ingezien, meestal een gevoel van grote voldoening, als zij er in geslaagd zijn, van de stelling van Pythagoras of van een andere meetkundige wetenswaardigheid een keurige stamboom op te stellen, even duidelik en overzichtelik als die van het huis van Oranje. Ik heb er wel in mijn klas gehad, die de boom erbij tekenden en de hele zaak in hun jongenskamertje aan de muur hingen.

Wat hier omtrent het woord „bewijzen" gezegd is, geldt voor nagenoeg alle in de wiskunde gebruikelike, maar aan de taal van het dageliks leven ontleende termen: voor wie op het verschil in betekenis niet verdacht is, dreigt haast bij ieder woord misverstand met al de belemmerende en ontmoedigende gevolgen van dien. Een plat vlak of een rechte lijn zijn in de meetkundeles heel andere dingen dan in de timmermanswerkplaats, en termen als het zoëven door mij gebezigde „opgesloten liggen in", of „volgen uit" e.d. zijn in dat opzicht nog veel gevaarliker: getuige de dikke boeken, die over hun betekenis geschreven zijn. En er nog over geschreven zullen moeten worden, eer altans de grootste meningsverschillen onder de mannen van het vak op dit punt uit de weg geruimd zullen zijn. Wat intussen geen bezwaar behoeft te wezen, om het wiskundepad van het jongere geslacht alvast een weinig te effenen.

In dit opzicht nu zou reeds veel gewonnen zijn, indien bij docenten en aanstaande docenten in de wiskunde het inzicht zou baanbreken, dat de taal en de gedachtegang van hun leerlingen een langzame en geleidelike ontwikkeling moet doormaken, eer zij ook maar een klein weinigje met de mathematiese denkvorm vertrouwd zullen kunnen zijn. Een ontwikkeling, die niet geforceerd kan worden door eindeloos vraagstukken oplossen en lessen leren, maar waarbij het mondeling verkeer tussen leerling en leraar, *en veel meer nog dat tussen de leerlingen onderling* de voornaamste faktor vormt. Wiskundewerk is denkwerk, en denkwerk is taalwerk. En een taaldaad

vereist voor zijn voltooiing een spreker en een hoorder, al is het dan maar een denkbeeldige spreker en een denkbeeldige hoorder, om het even of het de taaldaad van de rekenende of van de niet-rekenende mens geldt. En juist daarom zou ik zo gaarne de nog maar al te veel *docerende* wiskunde-onderwijzers het grote nut van de onderlinge samenwerking hunner discipelen op het hart willen binden. Heus, deze kunnen elkander de zaak in de meeste gevallen oneindig veel beter uitleggen, dan wij volwassenen dat met onze korrekt gebouwde, maar gemeenlik veel te lange en ingewikkelde volzinnen dat vermogen te doen. Maar ik vrees, dat voor de meeste vakgenoten deze en dergelijke beweringen voorshands nog te paradoxaal zullen klinken, en zij zich liever aan het oude en beproefde: „stilzitten en niet voorzeggen" zullen houden. Laat ik daarom liever een praktiese vraag stellen, om het voorgaande te illustreren: wat is eigenlik een konstruksie?

§ 18. Een meetkundige figuur, een cirkel of een driehoek b.v., behoort niet tot de dingen, die door mot of roest verteerd worden, zo wijs is de meetkundebeginneling al gauw. Maar dat daaruit volgt, dat die figuur evenmin ontstaan als vergaan kan, en dat ze dus ook niet kan worden gemaakt of geschapen of daargesteld, om met de Duitsers te spreken, en dus van een „konstruksie" in de gewone zin des woords hier geen sprake kan zijn, is hem meestal minder duidelik. En dat zijn met zoveel zorg en Oostindiese inkt uitgevoerde konstruksie nog niemendal betekent, zolang het bijbehorende bewijs ontbreekt, en dat dan konstruksie èn bewijs tezamen een soort van gekamoefleerd theorema uitmaken, nog veel minder. En toch zal hij dat langzamerhand dienen te begrijpen, om geen gevaar te lopen, in hopeloze knoeierijen te vervallen, of erger nog, als de hartstocht hem te pakken mocht krijgen, terwijl het recht begrip ontbreekt, misschien later een ongelukkige triseksie-maniak of kwadratuur-maniak te worden. Maar ook als de leerling zover is gevorderd, dat hij wel inziet, dat tussen een „werkstuk" en een „stelling" enkel een verschil in vorm, een verschil in inkleding bestaat, dan blijft hem nog iets te vragen over. Te weten: waaròm kan ieder werkstuk in de vorm van een stelling gebracht worden, ofschoon niet iedere stelling als werkstuk kan worden ingekleed? Met andere woorden: hoe kan ik het eigenaardige van die werkstukken omschrijven, als ik daarbij niet van de terminologie van de tekenaar gebruik mag maken? En omdat het

wel van den beginne af duidelik is, dat de eigenlike konstruksie een aaneenschakeling van postulaten is, wordt de bedoelde vraag gereduceerd tot die naar het wezen en de wiskundige betekenis van zulk een postulaat. „Een rechte lijn te trekken door twee gegeven punten", en: „een cirkel te beschrijven, als middelpunt en straal gegeven zijn", dat zijn de beide bouwstenen, die gewoonlijk aan onze wiskundige jeugd in handen gegeven worden, als ze aan het voor de meeste hunner zo aantrekkelike hoofdstuk der konstruksies gevorderd zijn. Of liever: in *handen* krijgen ze wat anders, de passer en de liniaal namelik. De twee instrumenten, die zo uiterst geschikt zijn, om ons fysiese onderkomplex paraat te houden, als het door de konkurrentie van ons logiese dito overvleugeld dreigt te worden. Maar die ons helaas ook zo dikwijls het doel voorbij doen schieten, en ons het hele „redeneren" (waarom het per slot van mathematiese rekening toch te doen is) radikaal doen vergeten. Doen vergeten, dat het „trekken" van de lijn *s* door de punten A en B niet anders beduidt dan het *bepalen* van de lijn *s* als de-verbindingslijn-van-A-en-B, en dat het uitvoeren van dat postulaat een *naamgeving* en dus een *geestelike werkzaamheid* is. Zeker, er is onderscheid tussen wat we in de meetkunde gewoonlik onder een definitie en wat we onder een konstruksie verstaan: de definitie van het inpunt van een driehoek is niet hetzelfde als de konstruksie ervan. De *definitie* is de omschrijving van de uitdrukking „inpunt-eens-driehoeks" in het algemeen, en de overeenkomstige *konstruksie* stelt vast, wat ik onder „het inpunt I van de driehoek ABC" te verstaan heb, of beter gezegd, zij stelt de betekenis van het symbool „I" vast, en het „bewijs", dat de konstruksie voltooien moet, is niet anders dan de *afleiding* van deze *biezondere* definitie uit de *algemene*. Zodat men zou kunnen zeggen, dat een figuur *konstrueren* niet anders inhoudt, dan die bepaalde figuur *definieëren,* en wel op een biezondere wijze, die door de keus der postulaten of „grondbepalingswijzen" is voorgeschreven. Of iedere meetkunde-docent van deze simpele begripsassociaties doordrongen is?...

Maar laten we ons liever tot de leerling bepalen, en ons afvragen, wat er te doen en te laten valt, om deze in staat te stellen, zijn passer en zijn liniaal goed te gebruiken, en er zich daarna weer van los te maken en op zijn eigen mathematiese benen te staan?

Te *laten* valt er, zou ik menen, iedere poging, om het inzicht, dat hierboven op vluchtige wijze is aangeduid, aan de leerlingen

als het ware met de paplepel te willen ingeven. Wie de eerste les in het konstrueren met een predikatie over de formalistiese en symboliese betekenis van postulaten zou willen openen, zou even dwaas doen als de ouderwetse wiskundeleraar, die de eerste meetkundeles aan zijn elf of twaalfjarige slachtoffertjes niet anders meende te mogen beginnen, dan met een filosofiese ontboezeming over punten, krommen en oppervlakken in het algemeen, waarvan het enige voordeel was, dat ze in de onbedorven gemoederen zijner jongeren maar zelden een spoor achterliet. En wat er te *doen* valt? Wel, in hoofdzaak niet anders dan dit: *de leerlingen in de gelegenheid stellen zich meer en meer rekenschap te geven van de regelmatigheden, die in hun spreken en denken over fysiese verschijnselen in het algemeen en over hun experimenten met passer en liniaal in het biezonder, op te merken vallen. Hoe* dat „in de gelegenheid stellen" nu precies moet gebeuren, kan geen sterveling van te voren zeggen, en komt er trouwens, geloof ik, niet zo heel veel op aan: „toute méthode est bonne, hors la méthode ennuyeuse". „Blind konstrueren", dus zonder potlood en papier, geheel uit het hoofd, de uit te voeren manipulaties precies opsommen, met letters en al, en dan tegelijkertijd de gebezigde postulaten netjes tellen, is een spelletje, dat de meesten niet gauw verveelt. Vooropgesteld natuurlik, dat er „publiek" is, om door bijval of kritiek het kunstvuur te onderhouden! En dan natuurlik: stambomen maken, ditmaal niet van de „stellingen", maar van de „plaatsbepalingen" van punten of rechten, stambomen, waarbij de leerlingen gewoonlik zelf allerlei verkorte schrijfwijzen uitdenken, die door een handig docent door middel van enkele aanwijzingen gemakkelik tot een primitief soort van symbolisme om te vormen zijn. En dan zal ook al spoedig de behoefte aan meer postulaten (betreffende het snijpunt van twee rechten of het snijpuntenpaar van rechte en cirkel in de eerste plaats) gevoeld worden, en zelfs is het niet uitgesloten, dat deze of gene slimmerik onder de klassegenoten al enig gevoel toont voor de eisen van onafhankelikheid, die uit formalisties oogpunt aan een postulatensysteem te stellen zijn, en zich b.v. het hoofd breekt met de vraag, of de doorsnijding van twee cirkels op de vorige postulaten zou kunnen worden teruggebracht of niet. En al is nu het *beantwoorden* van die vraag geen kost voor de lagere klassen van de burgerschool, met het *stellen* er van is reeds meer gewonnen, dan door een uitvoerige behandeling van het raakpro-

blema van Appolonius volgens de oude methode van „dwingt ze om in te gaan" te bereiken valt.

Maar laat ik oppassen, niet zelf in die methode te vervallen, en aan de docenten onder mijn lezers overlaten, hun eigen weg te kiezen, om het *doel* van het elementaire wiskundeonderwijs: het leggen van de signifiese grondslagen, waarop een later (veel later!) op te bouwen *axiomaties* systeem rusten kan, te bereiken.

§ 19. Alvorens over te gaan tot een signifiese inspeksie van de algebraiese kant van het wiskundeonderwijs, nog een enkel woord over de uitbreiding van de meetkundige kunsttaal buiten het rechtstreeks door de fysika der vaste lichamen bepaalde gebied, waarbij ik in de eerste plaats het oog heb op de meetkunde der ruimte van vier afmetingen, of, zoals men gewoonlik met een enigszins stoute beeldspraak zegt; de vierdimensionale meetkunde. Ik heb meermalen kunnen konstateren, dat reeds voor vrij jeugdige leerlingen (zeg: van dertien of veertien jaar) een grote aantrekkelikheid in dat onderwerp gelegen is, en de allereenvoudigste beginselen dier meetkunde (doorsnijding van twee „drieruimten", loodlijnen op „onze" drieruimte, de hyperkubus, e.d.) zonder al te grote moeite door hen kunnen worden ontdekt. En wel vooral, als ze van te voren nog nooit van dergelijke fantastiese denkkunstjes gehoord hebben, en hun in ieder geval niet door den een of ander is aangepraat, dat die iets met geestenzienerij en tafeldans te maken hebben! En ook weet ik bij ervaring, dat enkele noties van deze tak der (formele) geometrie, al of niet ondersteund door een vergelijking met de *tweedimensionale* ruimte (waarbij het kostelike boekje „Platland" goede diensten kan bewijzen) uitnemend geschikt zijn, om het onderscheid tussen de wiskundige en de fysiese terminologie te doen opmerken. En wat de zoo beruchte moeilikheid van het onderwerp aangaat, wel, die is zeer betrekkelik. De stelling van Pythagoras of de evenredigheid van lijnsegmenten om maar iets te noemen, vereist veel ingewikkelder redeneringen en veel subtieler onderscheidingen dan een denkbeeldige ontdekkingsreis door de „driebegrenzing" van de hyperkubus. Een beetje „aankleding" van de anders al te abstrakte woordgochelarijen moet er natuurlik bijkomen, en ik herinner me, menigmaal veel succès geoogst te hebben met het denkbeeld van een „toverlift" met vier knopjes in de wand: één voor op-en-neer, één voor links-en-rechts, één voor vóór-en-achteruit en dan nog één voor een mystiek en

noch nie dagewesenes „heen-en-weer", dat ons in staat stelde, de duffe schoolwereld te verlaten en vakantiereisjes naar andere „driewerelden" te maken. De verstandige paedagoog zal bij zulke gelegenheden eventueel àl te vèrvoerende Wells- of Jules-Verne-fantasieën wel weten in te perken.

Maar vooral ook als de leerlingen wat ouder en bezadiger geworden zijn, en misschien al aan einddiploma's of universiteitstudie gaan denken, kan een matige portie „viermeetkunde" (kortheid van uitdrukking is een der hoofdvereisten voor een goede formalistiek!) goede diensten bewijzen en grote belangstelling wekken. Het hangt natuurlik geheel van de leerlingen af, hoever men hierin gaan kan, zonder tot verwarring van denkbeelden aanleiding te geven, en een verstandig leraar zal zich hierbij in hoofdzaak door de mate van weetgierigheid zijner leerlingen laten leiden, maar als men in dat opzicht niet in al te ongunstige omstandigheden verkeert, is het lang niet onmogelik, via de (euklidiese) viermeetkunde tot de „sferiese driemeetkunde", d.i. de meetkunde op de hypersfeer te komen, en aan de leerlingen te doen inzien, dat onze *fysiese* terminologie met betrekking tot de vaste lichamen evengoed tot zulk een sferiese driemeetkunde als tot de gewone kan gegeneraliseerd en gefatsoeneerd worden. Een inzicht, dat er veel toe kan bijdragen, het formalisties karakter van het z.g. parallellenaxioma te begrijpen.

Is het nog nodig, hierbij te voegen, dat de behandeling van laatstgenoemd onderwerp met *beginnende* leerlingen (gelijk dat nog maar al te veel geschiedt) mij, om het parlementair uit drukken, „enigszins misplaatst" voorkomt? Ik wil hopen van niet!

HOOFDSTUK III.

Het algebraies of analyties denken. Het funksiebegrip.

§ 20. Wanneer de toekomstige Pascal of Gauss voor het eerst het heuglik nieuws verneemt, dat „in de algebra" $a + a$ gelijk is aan $2a$, en $b + b + b$ gelijk aan $3b$, heeft hij een schrede voorwaarts gedaan in de richting der formalistiek, waarvan de belangrijkheid hem zeer zeker niet in het minst bewust is. En toch, wanneer wij ons een ogenblik rekenschap geven van het verschil tussen abstrakte en konkrete woorden, en opmerken, dat in de taal

van het dageliks leven de laatste soort hoofdzakelik in de vorm van voorwerpsbenamingen voorkomen, die gevormd zijn door toevoeging van een lidwoord of voornaamwoord aan een soortnaam, dan is het duidelik, dat *grammaties* beschouwd, die „a" en die „b" zich toch wel heel zonderling gedragen. Met de telwoorden hebben zij gemeen, dat zij attributief gebruikt kunnen worden, maar dat komt in de algebrales toch maar zelden voor; meestal nemen zij een zelfstandige plaats in het algebraies zinsverband in. Maar soort- of voorwerpsnamen zijn het toch ook weer niet, al was het maar alleen omdat zij vandaag dit en morgen weer wat anders kunnen betekenen. Zoekt men het kriterium voor het min of meer *konkreet* karakter ener uitdrukking in het lossere of vastere verband met een bepaald en welbegrensd voorstellingskomplex, dan zouden die a en die b eigenlik tot de meest abstrakte taalverschijnselen gerekend moeten worden, maar het eigenaardige is juist, dat voor de ware algebraman geen konkreter uitdrukkingen bestaan dan diezelfde letters: een „a" is een „a" en verder niemendal. Van enige *betekenis,* die aan dat symbool te hechten zou zijn, is voor hem geen sprake en hij beoefent zijn kunst zonder zich door de bijgedachte aan een of ander maatschappelik of persoonlik doel te laten afleiden. Hij speelt als het ware met zijn letters en tekens op dezelfde wijze als de schaker of dammer met zijn stukken, maar dan met dit verschil, dat hij zijn „stukken" uitspreekt of neerschrijft alsof het woorden waren, en er reeksen van formeert, die bedrieglik veel op volzinnen gelijken, zonder dat zij aan werkelike taaldaden, dat is aan bepaalde doelkomplexen gebonden zijn. Of het moet het doelkomplex van „l'art pour l'art" zijn: het complex van de algebraiese spelregels zelf, zoals zij onze algebraformalist min of meer duidelik voor de geest staan. En het zijn nu juist *deze* gedachtegang en *deze* werkwijs, die aan de beginnende leerling ten enemale vreemd zijn.

De psychologen zijn het er, geloof ik, vrijwel over eens, dat de taal van de jeugd meestal een meer konkreet karakter draagt dan die van de ouderen: het bepaalde en opzichzelf gestelde, nu eens met hartstocht nagestreefde en dan weer schijnbaar willoos aanvaarde of verworpene vervult in de gedachtegang van de jeugd ongetwijfeld een grote rol. Van algemene en onbepaalde bespiegelingen of overpeinzingen moet zij gewoonlik niets hebben, en als zij soms zelf aan het filosoferen slaat, doet zij dat meestal

op een erg dogmatiese manier. Met andere woorden: de jeugd is als het ware voorbeschikt *voor een sterk geformaliseerde denkvorm.*

Maar hoe komt het dan, hoor ik vragen, dat de geneugten van de algebrales zo zelden door diezelfde jeugd geapprecieërd worden?

De oplossing van deze schijnbare tegenspraak is, geloof ik, voor wie de hierboven gemaakte onderscheidingen in het oog houdt, niet moeilik. Immers in de algebrales *wordt* de kunst niet om de kunst beoefend, maar is het wel degelik om de praktiese toepassing van die gochelkunst-met-letters-en-cijfers op de dingen des werkeliken levens te doen. Op de fysika in de eerste plaats, zowel op dat gedeelte, dat Euklides op zo systematiese wijze heeft bestudeerd, als op de natuurkunde in de meer gebruikelike betekenis van het woord; maar ook op nog velerlei andere onderwerpen. En die toepassingen brengen met zich mede, dat aan dezelfde lettersymbolen telkens weer een andere begripsinhoud moet worden gegeven, en dàt is het nu juist, wat aan jeugdige leerlingen gemeenlik grote moeilikheden berokkent. En geen wonder. Immers in die eigenaardigheid der algebraiese symbolen, voor zo velerlei verwisselingen (of „substituties", om algebraies te spreken) vatbaar te zijn, ligt juist het kenmerkende van datgene, wat men gewoonlik als het abstrakte aanduidt, en wat aan de denkvorm van jonge mensen maar zelden eigen is. Er is dan ook een onuitputtelik geduld van de docent, en veel volhardende zelfwerkzaamheid van de leerling voor nodig, eer deze laatste in dat „substitueren" (hetzij van woorden voor letters of omgekeerd, hetzij eenvoudig het in de plaats stellen van de ene symbolengroep voor de andere) een zodanige vaardigheid heeft gekregen, dat hij door de kracht der gewoonte zijn tekort aan abstraheervermogen kan aanvullen. Eenvoudige formules, b.v. de aan iedere schooljongen als „merkwaardige produkten" bekende identiteiten, bieden voor die zelfwerkzaamheid de beste oefenstof.

Er is evenwel nog een andere, en vrij wat ernstiger moeilikheid bij het aanvankelik algebraonderricht te overwinnen, dan die, welke in het zo abstrakte karakter van de algebraiese denkvorm (niet te verwarren met de algebraiese formalistiek!) ligt opgesloten, en wel een moeilikheid, waarvan zelfs het bestaan door vele docenten nimmer wordt opgemerkt. Zij is gelegen in de misverstanden, voortspruitende uit de geleidelike uitbreiding van het getalbegrip

enerzijds en uit de verschillende betekenissen van het gelijkteken anderzijds, die ik hier op het oog heb. Allereerst een korte toelichting tot het eerstbedoelde struikelblok op de weg, die naar „el dzjabre" voert: de wijzigingen in het getalbegrip, d.i. in de betekenis van a en b!

§ 21. Dat vijf gulden verlies en drie gulden winst op hetzelfde neerkomt als twee gulden verlies en dat men dus in de een of andere formule de symbolenkombinatie $-5+3$ door -2 mag vervangen, is ook voor beginnende wiskundeleerlingen volstrekt niet moeilik in te zien, en evenmin zal het hun, nadat zij in het substitueren enige vaardigheid hebben verkregen, veel moeite kosten, de verschillende regels voor het verdrijven van de haakjes bij veeltermen of bij produkten van veeltermen uit een geschikt gekozen reeks voorbeelden zelf af te leiden en daarna weder op nieuwe voorbeelden toe te passen, *zolang de letters zelve, die in die voorbeelden voorkomen slechts positieve d.w.z. in hun oog „gewone" getallen voorstellen.* Geheel anders echter wordt de van de leerling gevergde gedachtegang, zodra de door een enkele letter voorgestelde negatieve getallen (men zou ze eigenlik de *impliciet-negatieve* getallen moeten noemen) hun intrede doen. Dan toch stelt zulk een letter niet alleen (gelijk tot dusver) een *getal* voor, maar tevens de betrekking, waarin dat getal tot een ander gegeven, of als gegeven gedacht getal staat, en wel in dien zin, dat het daarbij opgeteld of daarvan afgetrokken moet worden. Een dergelijke kombinatie van een zelfstandigheid met een relatie wordt in de gewone taal slechts zelden door één symbool (d.i. door één woord) voorgesteld: de, altans in onze taal zeldzame, verbogen vormen van zelfstandige naamwoorden of voornaamwoorden leveren nog de beste, hoewel vrij gebrekkige voorbeelden van zulk een kombinatie op. Geen wonder, dat de leerling, aan wiens taalervaring een dergelijk verschijnsel vrijwel geheel vreemd is, hier groot gevaar loopt, het onderscheid tussen de nieuw ingevoerde en de vroegere lettersymbolen uit het oog te verliezen, en daardoor in een hopeloze verwarring te geraken. Gemeenlik wordt dat gevaar nog versterkt door de primitieve wijze, waarop de hierbedoelde symbolisering van de kombinatie getal-met-plus-of-minteken bij de leerling wordt ingeleid. Niet alleen, dat men daarbij gewoonlik van „algebraïese" of „relatieve" getallen spreekt, alsof het hier een biezonder *soort* van getallen betrof, en dat de zinledige uit-

drukking „tegengestelde toestand van een getal" nog altijd opgeld doet, maar, wat erger is, het volkomen *betrekkelik* karakter van de aanduiding „positief" of „negatief" wordt maar zelden in het licht gesteld. Het is mij dan ook meermalen voorgekomen, dat zelfs meergevorderde leerlingen nog altijd in de waan verkeerden, dat „winst" per se positief en „verlies" negatief zou moeten worden genoemd! Gelukkig maar, dat de in vroeger eeuwen gebruikelike methode, de negatieve getallen als „kleiner dan nul" te definieëren, vrijwel in onbruik geraakt is, al zou ik niet durven beweren, dat deze begripsverkrachting geheel en al uit de huidige school gebannen is.

Nog vrij wat ernstiger echter dan bij de invoering der negatieve getallen, is het gevaar vóor misverstand bij de kennismaking met de komplexe, of, gelijk het nog maar al te vaak heet: met de „onbestaanbare" getallen. Dat een „komplex getal" niet anders dan een verzamelnaam vóor een (gerangschikte) getallen*groep* is, en wel in dit geval: voor een *getallenpaar,* en het dus hier een wijze van uitdrukken geldt, analoog aan het gebruik van enkelvoudsvormen met meervoudsbetekenis (als „dubbelster", „kruisweg", „veelvoud", e.d.), wordt de leerling zelden duidelik gemaakt. En wanneer al met een enkel woord op deze belangrijke nieuwigheid in het algebraies tekenschrift gewezen wordt, dan wordt nog vaak verzuimd, op de konsekwenties te wijzen, die deze begripsuitbreiding ten aanzien van het gelijkteken met zich brengt: de gelijkheid van twee „dubbelgetallen" toch sluit de gelijkheid hunner samenstellende delen of komponenten in. Maar laat ik liever, inplaats van verder te gaan op deze, misschien wat al te gemakkelik begaanbare weg van het uitoefenen van kritiek op de bestaande methoden van onderricht, trachten aan te geven, op welke wijze dan wel dient te worden gehandeld, om de aangeduide gevaren tot een minimum te reduceren.

Ik stel daarbij voorop, dat het van het hoogste belang is, wel te onderscheiden tussen het werken met dubbelgetallen (aan deze benaming meen ik om didaktiese redenen de voorkeur te moeten geven boven de gebruikelike aanduiding „komplexe" of „gaussiese" getallen), waarvan de beide komponenten afzonderlik zijn aangegeven („expliciete dubbelgetallen") en het, *formeel* veel gemakkeliker, maar begripsmatig veel moeiliker opereren met „impliciete dubbelgetallen", die door een enkel letterteken worden voorgesteld,

een onderscheiding, die geheel analoog is aan het zoëven ten aanzien van de negatieve getallen door ons opgemerkte. Men zij hier uiterst voorzichtig met het invoeren der bedoelde impliciete schrijfwijze, en ga daartoe niet over, eer de leerlingen met het werken met de expliciete dubbelgetallen geheel vertrouwd zijn geworden, en zij *zelf* hebben leren opmerken, dat de „regels van het spel" voor de dubbelgetallen eigenlik volkomen overeenstemmen met de rekenregels voor de enkelgetallen, en het enige *formele* onderscheid tussen deze beide hierin bestaat, dat uit een dubbelgetal wèl en uit een enkelgetal niet altijd een evenmachtswortel getrokken kan worden. Trouwens, voorzover mijn ervaring met dertien- of veertienjarige leerlingen strekt, komt dat ogenblik vrij gauw, en zijn de leerlingen zelf dan veelal geneigd, in de mondelinge of schriftelike aanduiding het onderscheid tussen enkel- en dubbelgetallen te laten vervallen. Dan kan er natuurlik ook geen enkel bezwaar meer tegen zijn, de dubbelgetallen nu ook door een enkel letterteken aan te duiden, al is het gewenst die lettertekens, altans voorlopig, door vorm of kleur van de andere te onderscheiden. Ook ten aanzien van de overige voor de algebraiese bewerkingen vereiste tekens (+, —, ×, :, =, enz.) is het wenselik, aanvankelik onderscheid in schrijfwijze en uitspraak te maken, al naar mate van enkel- of dubbelgetallen sprake is. Op praktiese wijze kan dit bijv. geschieden, door in het laatste geval bedoelde tekens tussen aanhalingstekens te plaatsen, en dan te spreken van „pseudo-som", „pseudo-verschil", „pseudo-produkt", „pseudo-gelijkheid", enz., enz. Bij het werken op het bord kan het kleurkrijt hier goede diensten bewijzen, om de wel wat lastige herhaling van aanhalingstekens onnodig te maken. Dit alles zijn echter uiterlikheden, die van minder belang zijn, en trouwens voor velerlei variatie vatbaar. Hoofdzaak is, dat de leerling geen enkel symbool neerschrijft, zonder precies te weten, wat hij bedoelt. Door welke uitwendige hulp- of misschien zelfs leermiddelen dat doel het best bereikt kan worden, kan niet eens voor al uitgemaakt worden: ieder ervaren docent zal zich in deze op zijn eigen wijs weten te helpen. Laat ik daarom hier enkel nog bijvoegen, dat ik bij het behandelen van dit hoofdstuk vaak veel gemak heb gehad van het gebruik van rechthoekige kaartjes, in tweeën gedeeld op de wijze van dominostenen, waarop dan de komponenten der dubbelgetallen afzonderlik waren aangegeven: [5|8], [— 3|4], [0|1], enz. Als de voorraad

wat geschikt gekozen is, kunnen hiermede gemakkelik allerlei voorbeelden van „pseudo-sommen", „pseudo-produkten", enz. gevormd worden, terwijl verwarring met enkelgetallen vrijwel uitgesloten is. En wat de „regels van het spel" aangaat, waarover wij het zoëven hadden, die zijn voor de „pseudo-optelling" en de „pseudo-aftrekking" al heel eenvoudig, terwijl voor de „pseudo-vermenigvuldiging" enkel behoeft afgesproken te worden, dat voor $\boxed{1 \mid 0}$ „×" $\boxed{1 \mid 0}$ wederom $\boxed{1 \mid 0}$, maar voor $\boxed{0 \mid 1}$ „×" $\boxed{0 \mid 1}$ steeds $\boxed{-1 \mid 0}$ in de plaats gezet moet worden. Overigens wijst dan de z.g. regel-voor-het-kruiselings-vermenigvuldigen de weg vanzelf, en is het slechts een kwestie van oefening en toepassing. Er is misschien geen leerstof, die beter voor de toepassing van de zelfwerkzaamheid der leerlingen geschikt is, dan deze!

Dat het gebruik van symbolen als „i" of „$\sqrt{-1}$" in dit stadium een grove inkonsekwentie zou zijn, behoeft hier toch zeker niet betoogd te worden?

§ 22. Het is geenszins de bedoeling van deze opstellen, een soort van handleiding bij het wiskundeonderwijs te vormen, en daarom mogen hier de moeilike kwesties van zuiver wiskundige aard, die zich bij het verder ontwikkelen van de theorie der komplexe getallen voordoen (waarvan die, welke de overgang van en naar de enkelgetallen betreffen, niet de eenvoudigste zijn) met stilzwijgen voorbijgegaan, en enkel nog enige punten besproken worden, waarbij meer in het biezonder gevaar dreigt voor het verbreken van de band tussen woord en gedachte. En daarbij denk ik in de eerste plaats aan de verschillende betekenissen, die in het algebraies tekenschrift aan de lettersymbolen en in verband daarmede ook aan het gelijkteken worden gehecht. Ik heb er reeds op gewezen, dat voor beginners (en misschien niet alléén voor beginners!) begripsverwarring kan voortspruiten uit de omstandigheid, dat dezelfde lettersymbolen nu eens voor enkel-, dan weer voor dubbelgetallen gebezigd worden, en een soortgelijk misverstand dreigt, wanneer de leerling bij gelegenheid van de behandeling der vierkantsvergelijkingen kennis maakt met het gebruik van één lettersymbool (het zal wel de letter x wezen), dat één van de beide wortels der vierkantsvergelijking kan voorstellen. Het geldt hier de onderscheiding tussen de beide logiese relaties, die door de voegwoorden „of" en „en" plegen te worden aangeduid, en die ook in de hogere

wiskunde (o.a. in de verzamelingsleer) zulk een belangrijk rol vervult. In de gewoonlik min of meer slordige taal van het dageliks leven worden deze beide relaties niet altijd scherp onderscheiden, en in gewoon Hollands betekent: „het kan vriezen, *en* het kan *óók* dooien" precies hetzelfde als: „het kan vriezen *of* dooien", en misverstand zal in deze wel niet te duchten zijn. Maar als de leerling in de algebrales met de drie notaties „x", „x_1" en „x_2" te doen krijgt, en onthouden moet, dat de beide laatste symbolen ieder een bepaald getal voorstellen (in casu de beide wortels van de vierkantsvergelijking), en daarentegen het eerste symbool òf x_1 òf x_2 kan betekenen (wat een gewichtig novum in de algebra-gewoonten uitmaakt), dan dreigt dat misverstand wel degelik. Vooral, wanneer ketterijen als „$x = x_1$" of „$x = x_2$" op het zwarte bord verschijnen. Een sprekende benaming kan hier veel nut doen, en door b.v. van „keuzegetallen", „keuzesymbolen" of „keuzeletters" te spreken, in tegenstelling tot „bepaalde" (of „bepaaldheids-") getallen, enz., maakt men het allicht zichzelf en zijn leerlingen gemakkelik. En dàn is er ook weinig bezwaar tegen, één „keuze-gelijkteken" in te voeren, dat niet de *zekerheid* der gelijkheid, doch enkel de *mogelikheid* daarvan aanduidt, en dus geschikt is, om keuzesymbolen en bepaaldheidssymbolen aan elkander te verbinden. Natuurlik zou het hoogst belemmerend werken, indien men deze en dergelijke onderscheidingen bij voortduring tot uitdrukking zou willen brengen: zodra zij hun dienst gedaan hebben, en de leerlingen gewoon geraakt zijn, zich van die onderscheidingen rekenschap te geven, kan de aanduiding er van vervallen, maar zolang de docent daaromtrent nog geen voldoende zekerheid heeft, verlieze hij het bekende „qui bene distinguit, bene docet" geen ogenblik uit het oog!

Een ander gewichtig novum in de algebraiese formalistiek doet zijn intrede, zodra de vergelijkingen met twee of meer onbekenden op het tapijt komen. Immers, wanneer een dergelijke vergelijking op zichzelf wordt beschouwd, dan drukt zij niet meer een *betrekking* tussen *bepaalde* getallen, maar de afhankelijkheid van twee *veranderlike* getallen uit, waarbij het dan dikwijls prakties is, de termen „afhankelike" en „onafhankelike" veranderliken in te voeren, en daarmede de weg te banen, tot een geleidelike ontwikkeling van het *funksiebegrip*. Het is een gelukkig verschijnsel, dat tegenwoordig het hulpmiddel der grafiese voorstelling van de bedoelde afhanke-

likheid van (twee) grootheden bij het elementair wiskundeonderwijs algemeen gebruikt wordt, waardoor de zoveel dieper in het onderbewustzijn wortelende visuele associaties aan de meestal brozere woordassociaties een groter stabiliteit kunnen verlenen. Wordt daarna deze methode der grafiese voorstellingen tot een volledige analytische meetkunde uitgewerkt, dan is het noodzakelik, ook verderstrekkende en meer subtiele verschillen in de betekenis der symbolen (b.v. dat tussen koördinaten en parameters) met de leerlingen te bespreken, maar de zich hierbij voordoende moeilikheden vallen, ook voorzover zij van signifiese aard zijn, buiten ons huidige bestek.

§ 23. Als de beginnende wiskundeleerlingen over kromme lijnen en gebogen oppervlakken horen spreken, misschien onder toevoeging van de zo gevaarlike en aanvechtbare uitdrukking: „willekeurige" („onwillekeurige" zeggen de jongens gewoonlik bij vergissing!), dan vermoeden zij weinig, dat deze begrippen, die hun zo doodsimpel en duidelik voorkomen, aan de wiskundigen van professie de grootste moeilikheden baren, en dat er heel wat differentiaal- en integraalrekening, funksie- en verzamelingsleer aan te pas moet komen, om aan zulk een „willekeurige kromme" een enigszins behoorlik touw te kunnen vastknopen. En dat dat touw, volgens de opvattingen van vele der modernste wiskundigen dan eigenlik nog niet eens helemaal deugt! En geen wonder, want deze en dergelijke uitdrukkingen vertegenwoordigen voor die leerlingen (in overeenstemming met het gewone spraakgebruik) zekere *visuele* voorstellingen, die ten nauwste met hun *fysies* onderkomplex samenhangen, terwijl de mannen van het vak zich afvragen, of het mogelik is, hun mathematies woord- of symbolensysteem zodanig uit te bouwen, dat hun *logies* onderkomplex daarbij op bevredigende wijze wordt geprikkeld, en tegelijkertijd de aan bedoelde uitdrukkingen verbonden „fysiese onderassociaties" de gedachtegang min of meer kunnen begeleiden. En dat is alles behalve een simpele kwestie!

Nu is het niet de taak van het elementair wiskundeonderwijs, mannen van het vak te vormen, en daarom zou het dwaasheid zijn, te trachten, de jeugdige leerlingen stukjes en brokjes van de zoëven genoemde hoofdstukken der hogere wiskunde te doen slikken, maar daarom mag toch niet verzuimd worden, hun aandacht te richten op de betekenis en het gebruik van een aantal termen, die ten eerste bij dat elementair onderwijs zelf moeilik geheel gemist

kunnen worden, en die voorts bij een verdere ontwikkeling van het funksie-begrip een hoofdrol spelen. En hiermede hebben wij hoofdzakelik die termen op het oog, die met de begrippen „oneindig", „oneindig klein", „limiet", „kontinu", e.d. tezamenhangen.

Allereerst het „oneindige". Daargelaten nog de repeterende breuken, die toch eigenlik niet anders dan oneindig voortlopende afdalende reeksen voorstellen, maakt de behandeling van de vierkantsworteltrekking de beschouwing van tiendelige breuken met een „oneindig aantal decimalen" noodzakelik. Iets, dat naar mijn ervaring ook zelfs voor vrij jeugdige leerlingen weinig bezwaarlik is, mits de onderwijzer zich van het zuiver symbolies en formeel karakter van de term „oneindig" *in de wiskunde* duidelik bewust zij. Daarom over dat karakter eerst een enkel woord.

Wanneer wij zeggen, dat twee-plus-één „evenveel" is als één-plus-twee, dan is niet alleen ons *logies*, maar ook ons *fysies* onderkomplex bij die taaldaad betrokken. M.a.w., de waarheid als een koe, die we hebben uitgesproken, is niet louter konventioneel, maar zij heeft een bepaalde *beeldinhoud:* reeds op de bewaarschool hebben wij aan het telraam bepaalde fysiese *ervaringen* opgedaan, die aan deze wiskundige formule geassociëerd waren.

Nu doet iedere fysiese ervaring een fysiese verwachting geboren worden, die op een herhaling dier ervaring gericht is, en wanneer wij al de (grotendeels onderbewuste) verwachtingen van deze aard, die wij in ons leven al zo gekoesterd hebben, in gedachte de revue laten passeren, dan moeten wij erkennen, dat slechts een *klein* deel daarvan tot teleurstellingen geleid heeft: de dingen om ons heen gedragen zich gemeenlik heel gewoon, en geven maar zelden blijk, niet te „willen", zoàls er van hen werd verwacht, roestige sleutels, koppige fleskurken en onhandelbare auto's daargelaten!

Een dergelijke fysiese-ervaringsinhoud nu is (zij het ook in veel mindere mate en in verzwakte vorm) aan alle rekenkundige eigenschappen, die op gehele getallen of op breuken (en dus op de zogenaamde „meetbare" getallen) betrekking hebben, eigen, *maar ontbreekt geheel ten aanzien van alles, wat met het begrip „oneindig" in verband staat.* En dus ook, om op ons voorbeeld van zoëven terug te komen, ten aanzien van de decimalen van wortel twee of wortel drie. Aan het symbool $\sqrt{2}$ beantwoordt niet de voorstelling van een *aantal* decimalen, d.i. van een verzameling bewustzijnsinhouden, maar een *rekenregel,* die ons in staat stelt, na een willekeu-

rige decimaal steeds weer een volgende te berekenen. En een rekenregel is heel iets anders dan een verzameling knikkers of lichtflitsen of elektriese schokken, dat spreekt, en daarom dragen alle wiskundige termen, die van de invoering van het oneindigheidsbegrip afhankelik zijn, een overwegend formeel karakter, al zou er een diepgaande studie vereist zijn, om de mate, waarin dat karakter in biezondere gevallen aan den dag treedt, nauwkeurig te onderzoeken. In het algemeen gesproken kunnen wij zeggen: *het wiskundig oneindigheidsbegrip heeft geen andere fysiese beeldinhoud dan die door de voorstelling van de symbolen zelf, waarmede het tot uitdrukking wordt gebracht, gevormd wordt,* waarbij vooral niet uit het oog moet worden verloren, dat hiermede niets gezegd is omtrent het *niet*-wiskundige oneindigheidsbegrip, zoals dat in velerlei filosofiese en godsdienstige overwegingen een rol speelt. De *daarbij* tot uitdrukking komende taaldaden dragen niet een overwegend *formeel,* doch een overwegend *voluntaristies* en *emotioneel* karakter, d.w.z.: de *gevoelswaarde* der daarbij betrokken gewaarwordingskomplexen treedt sterk op de voorgrond. Maar keren wij tot wortel twee terug.

§ 24. Het maakt gewoonlijk op de leerlingen, die de wiskundeles met belangstelling volgen, een paradoxale indruk, wanneer hun wordt aangetoond, dat de decimale ontwikkeling van de vierkantswortel uit een geheel getal onmogelik kan repeteren. Het bewijs zelf van die eigenschap is zo moeilik niet, maar het paradoxale van het geval is hierin gelegen, dat uit die eigenschap de onmogelikheid van een decimale schrijfwijze voor zulk een wortelgetal volgt, terwijl die schrijfwijze voor een repeterende breuk (zij het dan met gebruikmaking van het repeteerteken) wèl mogelik is. Men kan natuurlik wel schrijven $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, waarbij dan de bijgevoegde stippeltjes de onuitgesproken rekenregel voorstellen, die de voortzetting der decimale ontwikkeling mogelik maakt, maar daarmede is die rekenregel nog niet ondubbelzinnig uitgedrukt. Wat weer ten gevolge heeft, dat, als gegeven is: $a = 1{,}414\ldots$, daaruit *niet* mag worden gekonkludeerd, dat die a dan ook *gelijk* is aan $\sqrt{2}$, maar enkel, dat die daar minder dan één duizendste van *verschilt.* M.a.w., de decimale ontwikkeling der wortelgetallen brengt het rekenen met de z.g. benaderde waarden met zich mede, wat aan geheel andere regels onderworpen is dan het rekenen met nauwkeurige getallen, wat de leerlingen tot dusverre uitsluitend hebben beoefend.

Het spreekt wel vanzelf, dat dit alles de belangstellende leerling, waarvan ik zoëven sprak, niet duidelik voor de geest staat, of zonder hulp en voorlichting door hem begrepen zou kunnen worden, maar dit juist heeft ten gevolge, dat, als die voorlichting ontbreekt, een onbevredigend gevoel van „niet-begrijpen" overblijft, dat weliswaar (helaas!) spoedig uitslijt, maar tegelijkertijd aan het vermogen tot scherp onderscheiden en scherp redeneren, waar het ten slotte toch in hoofdzaak om te doen is, afbreuk doet.

De vraag is nu slechts: *hoe* moet die voorlichting ingekleed worden, om aan het bedoelde euvel tegemoet te komen, zonder in abstrakte redeneringen te vervallen, die de zaak slechts zouden verergeren? Ik herhaal, wat ik reeds eerder opgemerkt heb: vaste voorschriften zijn hier onmogelik te geven, en zeer veel zal van de persoon van de docent en van het gehalte en de ontwikkeling der leerlingen afhangen. Wil men termen als „oneindig", „oneindig voortlopend" en hun ekivalenten geheel en al vermijden, dan is daartegen geen enkel theoreties bezwaar. „$\sqrt{2}$" wordt dan een symbool voor een *meetbaar,* doch *gedeeltelik onbepaald* getal, te weten: de bekende decimaalontwikkeling 1,414..., voortgezet *tot een eindig, maar niet van te voren vastgesteld aantal decimalen,* en wij zullen angstvallig dienen te vermijden te zeggen, dat $(\sqrt{2})^2$ *gelijk* is aan 2, maar altijd de slag om de arm moeten houden, dat het daar „een weinig" van verschilt. Ik betwijfel echter, of deze z.g. finitistiese terminologie lang vol te houden is, zonder tot zó omslachtige redeneringen te voeren, dat zij het uithoudingsvermogen van de gemiddelde H.B.S.-er of gymnasiast verre te boven gaan. Zelfs voor geoefende mathematici toch is het konsekwent doorvoeren van dit finitisties standpunt uiterst bezwaarlijk, en door velen wordt zelfs betwijfeld, of die doorvoering „letzten Endes" wel geheel houdbaar is. Die mening nu kan ik niet delen, maar wel ben ik van oordeel, dat uit *didakties* oogpunt beschouwd, de mogelikheid van die doorvoering toch wel zeer beperkt is. Juist de denkende leerling zal al gauw de lastigste vragen stellen, en willen weten, *hoe* „weinig" dat verschil tussen $(\sqrt{2})^2$ en 2 dan wel wezen kan en mag, en wat er met dat verschil gebeurt, als we met zulke getallen-waar-een-steekje-aan-los-is aan het werk gaan? En dan zouden we òf geweldig ingewikkelde afspraken omtrent een minimum aantal decimalen en een maximum aantal optellingen, aftrekkingen en andere met benaderde getallen geoorloofde be-

werkingen moeten maken, òf de vrager met een kluitje in het riet moeten sturen!

Neen, dan heb ik voor mij er steeds meer baat bij gevonden, mij in de klasse op het bekende Vaihingse „alsob"-standpunt te stellen, en b.v. te zeggen: een heel lange rij soldaten heeft natuurlik een rechter en een linker vleugelman, dat spreekt, al kan ik de laatste in de verte misschien niet meer onderscheiden. Welnu, laten we eens nagaan, tot welke grappige gevolgtrekkingen we kunnen komen, door te doen alsof er in 't geheel geen linkervleugelman bestond! En dan ging ik lustig met mijn enthousiaste dertien- of veertienjarige medewerkers aan 't fantaseren: er werd „in rotten van twee", of „in rotten van drie" of „in rotten van honderdduizend" opgemarcheerd, en het „eind" was en bleef zoek. We konden „carré formeren", we lieten een paar honderd man sneuvelen en „aansluiten" kommanderen, tot er geen enkele lege plaats meer overbleef, we konden twee van zulke „oneindige rijen" ineénschuiven tot één enkele, die dan weer precies in de voetsporen van één enkele rij paste, enz., enz. Een spoorweg met telegraafpalen naar „Cassiopeia-en-verder" benevens de Magirusladder van een ideaal-brandweer bewezen gewoonlik ook goede diensten.

Natuurlik gaf dat alles weleens aanleiding tot misverstand of schijnbare tegenstrijdigheden, b.v., wanneer opgemerkt werd, dat een vermeerdering of vermindering bij oneindige rijen gecamoufleerd kan worden door een gewijzigde opstelling, wat bij eindige rijen natuurlik uitgesloten is, maar door scherp te onderscheiden tussen de „werkelike" of „werkelik mogelike" eindige en de „enkel op papier bestaande" oneindige rijen kan steeds iedere wezenlike tegenstrijdigheid vermeden worden.

§ 25. Het zou mij te ver voeren, de moeilikheden van signifies-didaktiese aard, die zich bij de verdere doorvoering van het (formele) oneindigheidsbegrip voordoen, hier in biezonderheden te bespreken. Wanneer niet enkel meer van wortel twee of wortel drie, maar van onmeetbare getallen in het algemeen gesproken moet worden, wanneer de „oneindig voortlopende" afdalende meetkundige reeks ter sprake komt, en bovenal wanneer men zijn leerlingen met de allereerste beginselen der differentiaal- en integraalrekening wil doen kennismaken en daarbij van de reeds hierboven genoemde termen „oneindig klein", „limiet-van-een-afhankelik-veranderlike", „kontinue verandering", „kontinue kromme" of dergelijke gebruik

wil maken, dreigt telkens weer hetzelfde gevaar voor misverstand, dat wij reeds enige malen hebben leren kennen: de verwarring n.l. van de *formele en symboliese kunsttaal* der wiskunde met de levende, doelbeogende en emotionele taal van het dageliks verkeer. En dat gevaar dreigt in veel ernstiger mate bij het algebra- en analyseonderwijs, dan bij het aanvankelik meetkundeonderwijs. Niet, omdat bij dat laatste de formele wiskundetaal en de „levende" fysiese taal gemakkeliker onderscheiden worden, — het tegendeel is waar —, maar omdat die onderscheiding daar minder nodig is. Over houten driehoeken en over geometriese woord-driehoeken spreken wij nagenoeg op dezelfde manier, alleen in het laatste geval wat nauwkeuriger en konsekwenter dan in het eerste, maar als we de magirusladders van de werkelike en die van de „ideaal"-brandweer niet goed uit elkaar kunnen houden, gebeuren er ongelukken!

En men mene niet, dat dat gevaar voor misverstand weinig of geen praktiese betekenis heeft, en bij voortgezette studie vanzelf wel wijken zal. Integendeel, het is van betekenis in tweeërlei opzicht.

In de eerste plaats voor de doorsnee-leerlingen, wier maatschappelike bestemming op niet-wiskundig terrein ligt. Deze zullen het grootste gedeelte van wat zij op de middelbare school in de wiskundeles geleerd hebben, in hun latere loopbaan nooit hebben toe te passen, en het enige (maar dan ook zeer kostbare) nut, dat voor hen van die wiskundelessen te wachten is, is gelegen in het fijner onderscheidingsvermogen ten aanzien van formele en volitionele woordbetekenissen, dat door *goed* wiskundeonderwijs aangekweekt kan worden. Ik heb mij nimmer kunnen verenigen met de gebruikelike grootspraak van vele wiskundigen, die beweren, dat de wiskundestudie ons zoveel beter leert *denken,* dan gewone stervelingen dat vermogen, en ik heb daarentegen altijd meer gevoeld voor de bekende Duitse uitspraak: „wo das Rechnen anfängt, hört das Denken auf", maar in één opzicht (dat echter bij die grootspraak niet bedoeld is) moet ik hen toch gelijk geven: de wiskundestudie kan ons niet tot betere, dat is: tot doelbewuster en wijzer denkers maken, maar zij kan ons wèl voorzichtiger doen zijn in onze gevolgtrekkingen en ons een heilzaam wantrouwen in de alleenzaligmakende leer van de logika inboezemen! En dàt is een onschatbaar voordeel, ook in het dageliks leven van individu en maatschappij. Zich niet gemakkelik door drogredenen te laten

meeslepen, gewaarschuwd te zijn voor de bergen van misverstand, die door een schijnbaar nietige wijziging in de interpretatie van een woord kunnen worden te voorschijn getoverd, kennis gemaakt te hebben met de velerlei uiteenlopende vormen, waarin volkomen hetzelfde verband-der-dingen kan worden uitgedrukt, dat alles zijn kostbare ervaringen ook voor wie na zijn schooljaren zijn algebra-en-meetkundelier voor goed aan de wilgen hangt. Maar die kostbare ervaringen put lang niet elke leerling uit de algebrales. Integendeel, ik heb wel eens de indruk gekregen, dat menig bezitter van een fraai einddiploma van H.B.S. of gymnasium zich gemakkeliker bij onbegrepen wijsheden neerlegt, dan hij gedaan zou hebben, als hij niet zoveel jaren in het aanhoren en napraten van onbegrijpelikheden geoefend was... En dàn is het toch wel zonde van de tijd en de moeite, aan die oefening besteed!

En nu degeen, die wèl verder in de wiskunde studeert? Wel, ik moet toegeven, dat die nu tenminste nog de gelegenheid heeft, zich klaar te maken, wat hem tot nu toe heel of half duister gebleven is, en zo het kwaad te herstellen, dat hem door àl te onsignifies, d.i. onpedagogies wiskundeonderwijs is berokkend. Maar daartoe wordt allereerst vereist, dat hij of zij zich *rekenschap* weet te geven van eigen half- of wanbegrip, en juist die zin voor zelfkritiek heeft dikwijls onherstelbare schade geleden, en veroorzaakt dan een chroniese denkslordigheid, die al heel spoedig iedere verdere vooruitgang op het smalle pad der mathesis absoluut onmogelik maakt. En misschien de mislukking van een carrière, waarvoor toch oorspronkelik de aanleg niet ontbroken heeft, met zich brengt.

Men versta mij wel, want ook hier dreigt het misverstand evengoed als in de algebrales. Goed wiskundeonderwijs is signifies wiskundeonderwijs, en signifies wiskundeonderwijs is van grote, en meer dan enkel praktiese nuttigheid ook voor de niet speciaal begaafden. Dat is het, wat ik in het voorgaande heb willen zeggen. Maar ik ben er mij zeer goed van bewust, dat signifika een modewoord en signifiese beschouwingen een modeartikel begint te worden, en dat is óók een gevaar! Er zijn goddank duizenden uitnemende wiskundedocenten, en er zullen er wel altijd uitnemende wiskundedocenten geweest zijn. En de meeste van hen zijn ongetwijfeld gespeend van ieder aanraking met het nieuwe modeartikel, waarvan ik sprak. En toch is en was zulk wiskundeonderwijs signifies, al was dat handelsmerk er niet op aangebracht. Want

een *goed* docent, en nu spreek ik in het algemeen, is een docent, *die weet, wat hij zegt, en die verstaat, wat zijn leerlingen zeggen.* En dat is het ware signifies inzicht, hetzij dan met of zonder opzettelike studie van dat onderwerp verkregen.

Ten slotte nog een enkele opmerking over de signifiese wetenschap (opgevat als de leer der associatienetten, die aan de taaldaden der mensen ten grondslag liggen), en de signifiese werkmethoden, toegepast op ander gebied dan dat van het wiskundeonderwijs. De verleiding is groot, de waarde van die toepassing op ander terrein, in de allereerste plaats op dat van het taalonderwijs (waaruit de eigenlike signifika is voortgekomen), maar voorts ook op dat der natuurkunde, der rechtswetenschap, der sociologie, ja, niet het minst op dat der psychologie en der kennisleer, in den brede te bespreken, maar ik meen beter te doen, aan die verleiding nog ietwat weerstand te bieden. Niet alleen, omdat het voor de schoenmaker toch altijd maar het veiligst is, zich bij zijn leest te houden, maar ook om de verdenking te ontgaan, per slot van rekening toch modeartikelen te willen aanprijzen!

De naar meer begerige lezer zij daarom naar het hiernavolgende, zeer sobere literatuurlijstje verwezen. [1])

SIGNIFIES LITTERATUURLIJSTJE.

Fred. van Eeden, Redekunstige grondslag van verstandhouding (Studies), Amsterdam, W. Versluys, 1897.

Jac. van Ginneken, S. J., De roman van een kleuter (Leergang der Nederlandsche taal, dl. I). Nijmegen, Malmgren, 1917.

Jac. Israël de Haan, Rechtskundige significa. Amsterdam, Joh. Müller, 1919.

Mededeelingen van het Internationaal Instituut voor Wijsbegeerte te Amsterdam, No. 1 en 2. Groningen, P. Noordhoff, 1918, 1919.

L. E. J. Brouwer, Wissenschaft, Mathematik und Sprache. (Monatshefte für Mathematik und Physik), 1929.

G. Mannoury, Mathesis en Mystiek. Een signifiese studie van kommunisties standpunt. Amterdam, Wereldbibliotheek, 1925.

———, Signifika en Wijsbegeerte. Tijdschr. voor Wijsbeg., 1923.

W. Esch, De ideale uitdrukking. Signifisch-philosophische ideeën. Amsterdam, Em Querido, 1930.

---

[1]) Bovenstaand artikel zal onder de titel „Woord en Gedachte" in brosjure-vorm worden verkrijgbaar gesteld.

OVER EXAMEN-OPGAVEN

DOOR

H. J. E. BETH, *Deventer.*

Het artikel met opschrift „Voor het laatst twee vraagstukken?" in de laatste aflevering van den vorigen jaargang geeft mij aanleiding tot het maken van enkele opmerkingen. Niet, dat ik het oneens ben met de hoofdstrekking van het betoog van Wijdenes. Ik geloof, dat de conclusie, tot welke hij komt, nauwelijks voor bestrijding vatbaar is, en vermoed, dat het artikel in hoofdzaak velen vakgenooten als uit het hart gegrepen is. Dat Wijdenes recht van spreken heeft, toonde hij opnieuw ten duidelijkste door zich niet te bepalen tot het leveren van kritiek op examen-opgaven, wat doorgaans een gemakkelijk en dankbaar bedrijf is (men denke in dit verband aan zekeren „Examen-Idioot"!), maar door zelf voorbeelden van een beter soort opgaven samen te stellen.

In dat artikel komen echter verschillende gewichtige punten terloops aan de orde, die mijns inziens een nadere beschouwing verdienen en ten aanzien van welke ik het met den schrijver niet overal geheel eens kan zijn.

Vooreerst wil ik een opmerking maken over een streven, dat erop gericht schijnt te zijn, de examen-opgaven dienstbaar te maken aan de in veler oog hoog noodige vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. Indien dit inderdaad de bedoeling van Wijdenes is, dan moet ik er bezwaar tegen maken, omdat zij in strijd zou zijn met het beginsel, dat het eindexamen nimmer het onderwijs mag beheerschen. Een eindexamen toch is een, noodzakelijk of niet noodzakelijk, goed of kwaad, dat we uitsluitend moeten houden, om te weten te komen, in hoeverre de leerlingen uit het geboden onderwijs nut getrokken hebben. Het onderwijs echter moet beheerscht worden door een leerplan, maar dan een leerplan, dat werkelijk iets inhoudt; het moet zoo nauwkeurig mogelijk de aan elke school te behandelen

onderwerpen aangeven alsmede den omvang, waarin ze moeten behandeld worden; het moet den gedachtengang aanwijzen, die tot de keuze der stof heeft geleid, en duidelijk maken, in welken geest het onderwijs behoort te worden gegeven; vooral de Franschen hebben getoond, hoe men een leerplan moet inrichten om te zorgen, dat de docent er inderdaad iets aan heeft. Zulk een leerplan zal van tijd tot tijd worden herzien, omdat de didactische inzichten zich met den tijd wijzigen; men zal onderwerpen, van welker waarde men niet meer overtuigd is, willen vervangen door andere, van welke men meer verwacht. De eischen, bij het eindexamen te stellen, zullen bij de gewijzigde leerstof moeten aansluiten.

Met het argument, dat een wenk door middel van een examenopgave een onfeilbaar middel is om tot een gewenschte uitbreiding der leerstof te komen, kan de zaak niet worden goedgepraat. Het is toch niet billijk een generatie van leerlingen schade te berokkenen ten behoeve van de volgende. Minder ernstig, hoewel mijns inziens nog steeds ongewenscht, wordt het, als men tot een examenopgave zijn toevlucht neemt om de aandacht te vestigen op een onderwerp, dat wel algemeen tot de leerstof gerekend wordt, maar waarvan gebleken is, dat het van de zijde der leeraren te weinig belangstelling ondervindt. Er moeten betere middelen zijn om dit doel te bereiken.

Ik zal een enkel voorbeeld noemen. In 1929 verscheen onder de opgaven de oplossing eener ongelijkheid; een vraag van deze soort was niet eerder voorgekomen. De mogelijkheid is denkbaar, dat deze opgave in verband stond met de in den laatsten tijd wel eens gemaakte opmerking, dat, als men op de gebruikelijke leerboeken af mag gaan, in het tegenwoordige onderwijs de ongelijkheden in bedenkelijke mate verwaarloosd worden, terwijl zij toch in beteekenis stellig niet voor de gelijkheden onderdoen. Indien het zooeven aangeduide vermoeden juist was, dan zal het doel van den steller der vraag voor een klein gedeelte wel bereikt zijn; de meeste vijfde klassen, die in 1930 het examen hebben afgelegd, zullen zich in den vorigen cursus wel met de oplossing van lineaire, kwadratische, en vermoedelijk nog andere ongelijkheden bezig gehouden hebben. Maar het is onwaarschijnlijk, dat men uit het optreden van de bedoelde opgave in het algemeen de verlangde gevolgtrekking zal hebben gemaakt, dat bij het onderwijs van den aanvang af aan de ongelijkheden de noodige zorg moet worden besteed. Als men een dergelijke aangelegenheid onder de aandacht der docenten

heeft willen brengen, dan is vermoedelijk het gebezigde middel toch nog gebrekkig geweest.

Ik noemde dit voorbeeld niet, omdat ik persoonlijk eenig bezwaar tegen het 2de vraagstuk van 1929 heb gevoeld. Ik kan niet gelooven, dat het veel candidaten kwaad gedaan heeft. Dezen zullen wel veelal omwegen gevolgd, onnoodig rekenwerk verricht en te veel gevallen afzonderlijk nagegaan hebben, maar in het algemeen zullen ze zich hebben weten te redden met hetgeen ze geleerd hadden, ook al hadden ze nooit een dergelijke vraag eerder ontmoet. Ik noemde het alleen, omdat men er een „strekking" in kan meenen te zien als boven werd aangeduid.

Tegen het denkbeeld van Wijdenes (dat ik op blz. 274 en 275 meen uitgesproken te zien) om de leerstof geleidelijk te vernieuwen door middel van opzettelijk tot dat doel samengestelde examen-opgaven moet ik dus bezwaar maken. Indien vernieuwing van het onderwijs noodig is (en met hem geloof ik, dat zij dat inderdaad is), dan moet dat uit de invoering van een nieuw, behoorlijk uitgewerkt en toegelicht, leerplan blijken.

In de tweede plaats meen ik tusschen de regels te moeten lezen, dat de schrijver bezwaar heeft tegen het beginsel van het voor alle scholen gelijkluidende werk, zooals dat aan de 5-jarige H.B.S. nog steeds geldt. Als ik het goed zie, dan schrijft hij hieraan een, de ontwikkeling belemmerenden, invloed op het onderwijs toe. Dit zou echter alleen juist zijn, indien de leeraren de examen-opgaven als leidraad bij hun onderwijs gebruikten, en Wijdenes gelooft toch even weinig als ik, dat dit in het algemeen het geval zou zijn. Stellig werken die opgaven in zekere mate (bij den een meer dan bij den ander) op het onderwijs terug. Even goed als een nieuwe opgave ten gevolge heeft, dat men de leerstof uitbreidt of aan een bepaald onderwerp meer aandacht gaat schenken, zal het regelmatig ontbreken van een onderwerp bewerken, dat de belangstelling bij het onderwijs ervoor gaat verflauwen.

Dat de opgaven voor algebra in het algemeen gebrekkig zijn, heeft mijns inziens met de uniformiteit van het examenwerk niets uit te staan. De oorzaak is eenvoudig deze: er is *te weinig* examenstof en die stof is *te gemakkelijk*.

„Het examen in reken- en stelkunde omvat de reken- en meetkundige reeksen, de logarithmen, de samengestelde interestrekening, de zonder „kunstgrepen" op te lossen vergelijkingen van den eer-

sten en tweeden graad met een of meer onbekenden en de oplossing van vraagstukken, die daartoe aanleiding geven. De onbepaalde vergelijkingen worden niet gevraagd."

Deze stof wordt in haar geheel in de 3e klasse afgehandeld, al zet men dan ook, om het examengeweten tot zwijgen te brengen, het verzekeringsbedrijf en de exponentieele en de logarithmische vergelijkingen (maar dan *met* „kunstgrepen"!) nog in de 4e en de 5e klasse tot het bittere einde voort. De ervaring heeft geleerd, dat men niet zonder ophouden uit een zoo beperkte en eenvoudige leerstof geschikte opgaven kan blijven putten. Men heeft zich genoodzaakt gezien moeilijkheden te brengen, waar zij niet waren, ten einde met iets nieuws voor den dag te kunnen komen. Men heeft vraagstukken aaneengeregen om aldus te komen tot iets, dat den candidaten nog eenige zwarigheid kan geven. We moeten eerbied hebben voor de vindingrijkheid der vakgenooten, die bij herhaling op het gebied der interestrekening aan het licht kwam, en die ten gevolge heeft gehad, dat dit onderwerp een nachtmerrie voor onze beste leerlingen geworden is. Wanneer men iets over de vierkantsvergelijking $x^2 + px + q = 0$ wil vragen, dan is men toch werkelijk wel haast verplicht om ten minste q in een vorm te geven als deze:
$q = {}^{5}\log {}^{1}/_{25} - {}^{7}\log 81 \times {}^{3}\log 7 - {}^{g}\log 0{,}01$ (waarin $g = \sqrt[3]{0{,}1}$ is) (zie 1929, I), indien men nl. de oplossing niet heelemaal cadeau wil doen!

De voor de hand liggende gevolgtrekking is, dat men òf dit gedeelte van het schriftelijke eindexamen moet laten vervallen (hetgeen ook in overeenstemming zou zijn met den algemeenen regel, dat het examen in hoofdzaak gaat over de in de beide hoogste klassen onderwezen onderwerpen), òf het onderwijs in analyse in de beide hoogste klassen moet voortzetten met behulp van leerstof, die voor de leerlingen in die klassen inderdaad geschikt is.

Naar aanleiding van het stel opgaven, dat Wijdenes op blz. 272 geeft, merk ik nog het volgende op: van $S_n = 3\,n^2 - 5\,n$ is sedert 1923 de aardigheid geheel af; No. 6 moet vervallen, omdat onbepaalde vergelijkingen niet tot de examenstof behooren (zie boven). De overige 4 vraagstukken lossen de leerlingen aan het einde der 3e klasse behoorlijk op; het schijnt door niets gemotiveerd, daarop bij gelegenheid van het eindexamen nog eens terug te komen.

Nu geeft Wijdenes echter bij deze 6 opgaven nog een 7e, te kiezen uit een geheele reeks; deze hebben bijna zonder uitzondering

betrekking op functies en grafieken; dit onderwerp behoort wel reeds eenige jaren tot de leerstof, maar het zal in 1931 voor het eerst tot de examenstof behooren, zoodat het billijk is, bij een beoordeeling der tegenwoordige examen-opgaven deze zaken buiten beschouwing te laten. Overigens toonen de voorbeelden, die hij hier geeft, duidelijk, dat deze stof voor een reeks van jaren een ruime gelegenheid biedt voor nieuwe, frissche opgaven. Met belangstelling wachten we af, hoe het nieuwe onderwerp onder de opgaven zijn intrede zal doen.

Dat werkelijk *niet* het beginsel van het uniforme schriftelijke werk oorzaak is van het gebrek, dat de algebra-opgaven aankleeft, blijkt duidelijk uit het feit, dat de opgaven voor de andere onderdeelen der wiskunde niet of in veel geringere mate aan het gewraakte euvel lijden. Toch zou het ook daar zeker aan de juistheid van beoordeeling der leerlingen ten goede komen, indien een grooter aantal dan 2 opgaven werd voorgelegd. Tegen het verlengen van den examentijd tot 3 uur kan ik geen enkel bezwaar zien; slechts in schijn zou dit een verzwaring van het examen beteekenen.

Het is mij niet onbekend, dat men bij het bepleiten van veranderingen als hier worden voorgesteld, tegen den geest van onzen tijd in gaat, die zelfs een schijnbare verzwaring van den op de leerlingen gelegden druk niet kan dulden. Het zou mij niet verwonderen, indien ook een vergrooting van het aantal opgaven als een nieuw bewijs zou worden aangeduid voor de juistheid der bewering, dat de H.B.S. „een meer en meer wiskundig karakter aanneemt."

Ik heb bij het bezwaar van Wijdenes tegen het uniforme schriftelijke werk even langer stil gestaan, omdat ik hem gaarne ervan zou overtuigen, dat hij zich hier vergist. Om, nadat ons het staats-eindexamen ontnomen is, het onderwijs aan de verschillende scholen nog op eenigszins overeenkomstig peil te houden en om de praestaties van de leerlingen van verschillende scholen nog eenigszins met elkaar te kunnen vergelijken, is die uniformiteit het eenige middel, dat men heeft kunnen aanwijzen. Ik weet wel, dat het middel gebrekkig is, omdat het schriftelijk examen slechts voor de beoordeeling van een bepaald gedeelte van de ontwikkeling der leerlingen geschikt is, waarover aanstonds meer, en omdat de waardeering van het gemaakte werk door verschillende docenten wel zeer uiteenloopend kan zijn; zoolang we echter geen beter middel hebben om het

genoemde doel te bereiken, zullen we verstandig doen ernaar te streven, dat we behouden, wat we nog hebben.

Thans kom ik tot mijn derde en laatste punt. Wijdenes wil (blz. 275), om de opgaven te besluiten, er 1 of 2 plaatsen, „waarbij het enkel op een goed begrip aankomt." Hiermede worden dan de opgaven bedoeld, die op blz. 272 met 7a, 7b, 7c enz. zijn aangeduid. Ik geloof nu, dat zijn onderscheiding tusschen vraagstukken, voor welke het wel, en zulke, voor welke het niet op begrip aankomt, onjuist is. De bedoelde vraagstukken hebben eenvoudig op andere leerstof betrekking. Voorloopig zal deze stof, zooals reeds gezegd werd, gelegenheid te over bieden tot het stellen van eenvoudige frissche vragen, waarbij alleen de candidaat kans krijgt, die van de zaken eenig begrip heeft gekregen. Maar het gevaar bestaat, dat ook deze stof na een aantal jaren even dood is geëxamineerd als thans de vierkantsvergelijkingen en de meetkundige reeksen het zijn; de aard der stof is hiervoor in het geheel geen beletsel. Dat dit gevaar niet geheel denkbeeldig is (dat bovendien toevoeging der nieuwe stof nog niet voldoende is om de door Wijdenes aangeduide fout te ontgaan, dat ten slotte de „vrijheid" van het gymnasiale eind-examen óók al geen voorkoming van zulke fouten beteekent) moge blijken, als ik hier slechts 3 eindexamenvraagstukken van Gymnasia (1928 of 1929) uit School-Algebra deel IV blz. 138 overschrijf, waar zij als nrs. 96, 97 en 98 zijn opgenomen.

96. De eerste term van een harmonische reeks is gelijk aan de som der termen van de oneindig voortloopende reeks.

$$1, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, +\frac{1}{81}, \ldots\ldots \text{ enz.}$$

De tweede term is gelijk $\lim\limits_{x=2} \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{-x^3 + 7x - 6}$.

Hoe groot is de 10e term?

97. Los x op uit

$$^{x}\log(4x-4) + {}^{4x-4}\log x^2 =$$

$$= \frac{1}{^{2x-1}\log(x+1) \;.\; ^{x+1}\log(4x^2-4x+1)} + \lim_{y=\infty} \frac{5y^2+y-1}{2y^2+2y+3}.$$

98. Van de vergelijking $x^5 - 17x^3 + ax^2 + 52x + b = 0$ is één der wortels $\lim \dfrac{x^2 - 8x + 15}{4(\sqrt{2x-6} - \sqrt{x-1})}$ voor $x = 5$, een tweede wortel is

$$\lim \left\{ {}^{\sqrt[3]{54}}\log 5 + \left({}^{\sqrt[3]{54}}\log 5\right)^2 + \left({}^{\sqrt[3]{54}}\log 5\right)^3 + \ldots\ldots \right\}$$

als het aantal termen oneindig is. Bepaal *a* en *b*, en daarna de drie andere wortels van de vergelijking.

Men ziet, dat hier danig met limieten gewerkt wordt, maar zal moeten toegeven, dat de berekening van een dezer limieten, indien er slechts een kleine training geweest is, weinig meer van het begrip eischt dan de herleiding van een wortelvorm of de sommeering eener meetkundige reeks.

Ik wil hiermede slechts te kennen geven, dat Wijdenes van de toevoeging van de bedoelde onderwerpen aan de examenstof, die ik natuurlijk óók toejuich, te veel verwacht. Hij overschat de beteekenis van het schriftelijk examen. In het algemeen genomen kàn dit slechts dienen ons te doen zien of de leerlingen 1° een aantal stellingen, formules en constructies beheerschen en 2° deze op niet al te gezochte opgaven kunnen toepassen. De onder 1° bedoelde hoeveelheid wetenschap is uiterst gering, in werkelijkheid vele malen kleiner dan het meest beperkte „vademecum" zou doen vermoeden. Het voldoen aan den onder 2° genoemden eisch is het, dat alleen heel wat oefening vergt. Hieruit blijkt reeds nogmaals, hoe verkeerd het zou zijn, het onderwijs door het examen te laten beheerschen. Immers, het schriftelijk examen onderzoekt alleen, kàn alleen onderzoeken datgene, dat velen met mij als een gedeelte, en niet eens het belangrijkste gedeelte, van de resultaten van het wiskunde-onderwijs beschouwen.

Een schriftelijk examen heeft bepaalde goede eigenschappen. Men plaatst den candidaat voor een, te voren nauwkeurig afgewogen, taak, en laat hem daarmede aan zich zelf over; hij kan werken volgens de eigen methode en in het eigen tempo en laat zich slechts haasten, als de tijd hem te krap toegemeten schijnt. Ontijdig ingrijpen van den examinator is uitgesloten en na afloop krijgt deze te zien, wat de candidaat geheel zelfstandig heeft kunnen volbrengen. Dit alles is van beteekenis en ik zou dan ook een schriftelijk examen niet willen missen. Men krijgt echter uit het geleverde werk niet een duidelijk en betrouwbaar beeld van het kunnen van den candidaat (het „begrip" laat ik hier geheel buiten beschouwing). Immers, men ziet bij de beschouwing van dat werk niet, door welke moeilijkheid hij ervan teruggehouden werd, zich aan één der opgaven te wagen; men begrijpt niet, welke zwarigheid hem deed besluiten

om, na een eindweegs op den goeden weg te zijn voortgeschreden, dien weg te verlaten, of halt te houden; men kan niet steeds nagaan of een begane onjuistheid een onschuldige reken- of teekenfout beteekent dan wel als een ernstig vergrijp moet worden aangerekend. Bovendien doen de dikwijls zeer uiteenloopende praestaties van denzelfden leerling in de klasse bij het schriftelijk werk reeds zien, dat op wiskundig gebied een schriftelijk onderzoek, met hoe groote zorgvuldigheid de taak ook wordt samengesteld, en hoe ruim de tijd ook toegemeten wordt, een onbetrouwbare maatstaf blijft.

Van veel grooter waarde acht ik een mondeling onderzoek. Men heeft daar gelegenheid, bij een juist antwoord verder na te gaan of het antwoord uit overtuiging en op goede gronden gegeven werd; men kan na een onjuist antwoord te weten komen in hoeverre de onjuistheid een gevolg is van overhaast en ondoordacht zich uitlaten, of van onmacht om de juiste uitdrukkingswijze te treffen, of van verkeerd *begrip*. Men kan nagaan, hoeveel hulp en tegemoetkoming van de zijde van den examinator noodig is om een bewijs op te bouwen. Een mondeling onderzoek van betrekkelijk korten duur, mits *niet* ingesteld door den leeraar zelf, is reeds voldoende om over de wetenschappelijke gesteldheid van den candidaat een vrij stellig oordeel uit te spreken. Het spreekt wel vanzelf, dat dan zulk een mondeling examen niet mag zijn een sommetjesmakerij op kleine schaal, zooals het schriftelijk examen een sommenmakerij op groote schaal geweest is. Het moet voornamelijk ten doel hebben om te weten te komen tot welke mate van inzicht het onderwijs in de wiskunde den candidaat gebracht heeft, en aldus beschouwd worden als een noodzakelijke aanvulling van het schriftelijk examen, dat de paraatheid van kennis en de verkregen routine als object heeft.

Wil Wijdenes, dat bij het examen ook het begrip tot zijn recht komt, dan zoeke hij dat niet te bereiken door opgaven van een bepaald type bij het schriftelijk examen, maar hij streve er naar, de overtuiging ingang te doen vinden, dat een schriftelijk examen in wiskunde, dat niet gesteund wordt door een ernstig mondeling onderzoek, van geringe waarde is, en te bevorderen, dat we weder van de „vrijstellingen" worden bevrijd, niet om de school moeilijker te maken, maar om het eindoordeel juister te doen zijn.

DE TANGENSREGEL EN HET PROBLEEM VAN SNELLIUS

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

In het vorige nummer van dit tijdschrift hebben de heeren B. L. van der Waerden en P. Wijdenes in spontane eenstemmigheid bezwaren geuit tegen een in het trigonometrie-onderwijs gebruikelijke oplossingsmethode, die o.a. wordt toegepast bij de berekening van de twee onbekende hoeken van een driehoek, waarvan twee zijden en de door deze zijden ingesloten hoek bekend zijn en bij de oplossing van het probleem van Snellius. Naar aanleiding hiervan zou ik iets willen zeggen ter verdediging van de op dit punt heerschende traditie, die mij niet zoo verwerpelijk voorkomt, als de beide inzenders haar voorstellen.

Men heeft bij de oplossing van een wiskundig vraagstuk niet zelden de keus tusschen de toepassing van een algemeene methode, die in staat stelt, het verlangde resultaat te vinden volgens vaste regels, die men ook in tal van andere problemen kan gebruiken en het volgen van een voor het bereiken van het gestelde doel speciaal geschikten weg, dien men bij aandachtige beschouwing van het opgegeven vraagstuk heeft opgemerkt en dien men misschien nooit weer bij een andere gelegenheid zal kunnen benutten.

Er zal wel nauwelijks verschil van meening over bestaan, welke van deze twee methoden de meeste originaliteit, denkkracht, frischheid van geest of hoe men het noemen wil, vereischt; bij de eerste spelen deze eigenschappen geen noemenswaarde rol, omdat daar het eigenlijke scheppende werk al is afgeloopen, als men heeft ingezien, dat het gestelde vraagstuk een voorbeeld van toepassing van de eenmaal geleerde algemeene methode bevat; bij de tweede wordt er, al naar de moeilijkheid van het probleem, in meer of minder hooge mate een duidelijk beroep op gedaan.

Dit verklaart dan ook, dat menschen met uitgesproken wis-

kundigen aanleg gewoonlijk een sterke voorliefde voor de tweede wijze van handelen vertoonen; ze vreezen het machinale, dat er in de toepassing van een algemeene methode schuilt en de mathematische sportiviteit spoort hen aan, een korteren weg te zoeken dan het platgetreden pad, waarlangs de groote schare trekt.

Er is nu bij het wiskunde-onderwijs op de H.B.S. eigenlijk geen gebied, waarop het bestaan van de twee geschetste mogelijkheden vaker tot didactische meeningsverschillen voert dan dat der trigonometrie; de twee uiterste standpunten hierbij zijn: *a.* onderwijs naast de definities van de goniometrische functies alleen den sinus- en den cosinusregel en laat iedereen, hiermee gewapend, zijn eigen weg zoeken; *b.* voorzie den leerling van een volledig instrumentarium van formules en methoden, zoodat hij in alle practisch voorkomende gevallen weet, hoe te handelen. Het spreekt wel vanzelf, dat tusschen deze twee uitersten tal van bemiddelende standpunten bestaan, die zooveel mogelijk de voordeelen van beide trachten te vereenigen. Voor een principieele didactische overweging is het echter het duidelijkst, slechts aan de twee uitersten te denken.

Wanneer we nu de door de twee inzenders voorgestelde methoden beschouwen, dan komt het mij voor, dat deze weliswaar heel goed passen bij het standpunt *a.*, maar dat ze in veel mindere mate dan de tot dusver gebruikelijke met het standpunt *b.* te vereenigen zijn.

Immers, wanneer men een zekere systematische verzameling van hulpmiddelen ter oplossing van vraagstukken aanlegt, dan is het wenschelijk, dat de daarin opgenomen formules en methoden een zoo ruim mogelijk gebied van toepassing hebben, dat ze dus op zooveel mogelijk verschillende, schijnbaar zelfs geheel uiteenloopende problemen kunnen worden toegepast. Dit beperkt den omvang van het aan te leggen instrumentarium en het bevordert de vaardigheid, waarmee elk van de bestanddeelen daarvan wordt gehanteerd.

Aan deze voorwaarden nu voldoet in hooge mate de methode van oplossing van het vraagstuk:

Van twee hoeken x en y zijn gegeven de som en de verhouding der sinussen:

$$x+y=\varphi, \quad \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{m}{n}$$

waarbij men door toepassing van een eigenschap van evenredigheden, gevolgd door het gebruik van de formules voor $\sin x \pm \sin y$

tot de, na korten oefeningstijd gewoonlijk zonder opzettelijk van buiten leeren onmiddellijk neergeschreven formule

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}=\frac{m+n}{m-n}.$$

Het is inderdaad opvallend, hoeveel trigonometrie-vraagstukken tot dit of een verwant type (verschil der hoeken gegeven inplaats van de som; verhouding van de cosinussen inplaats van die der sinussen) zijn terug te brengen.

En in het bijzonder vallen hieronder de twee vraagstukken, die in den aanvang van dit stukje werden vermeld. Als van een driehoek twee zijden en de door deze zijden gegeven ingesloten hoek gegeven zijn, kent men inderdaad van de andere hoeken èn de som èn de verhouding van de sinussen en het probleem van Snellius leidt na invoering van de twee toch altijd onvermijdelijke hulphoeken tot hetzelfde stel vergelijkingen.

Het lijkt mij nu bepaald oeconomischer, in deze twee gevallen de algemeene methode te blijven volgen, dan voor elk van beide een methode ad hoc in te voeren. En op dezen grond — niet, omdat de toegepaste formules logarithmisch zijn — zou ik de bestaande traditie op dit punt willen handhaven.

Natuurlijk is deze conclusie onverbrekelijk gebonden aan het standpunt *b.*; beschouwd van af standpunt *a.* zijn de voorgestelde methoden zeer te waardeeren, *mits ze niet als speciale methoden door den docent worden onderwezen en door den leerling worden geleerd.* Het is zeer toe te juichen, wanneer een leerling spontaan zoo handelt als de heeren van der Waerden en Wijdenes wenschen; wanneer men hem echter opzettelijk gaat leeren, dat hij het zoo moet doen, dan voorziet men hem niet van de beste instrumenten, die men hem geven kan.

Ik wil hieraan nog een enkele opmerking toevoegen over de al of niet verkieselijkheid der boven onderscheiden standpunten *a.* en *b.* Het eerste wordt tegenwoordig zoo populair, dat het tijd wordt, weer eens op de waarde van het tweede te wijzen. Want het *heeft* waarde en wel speciaal voor leerlingen, die geen uitgesproken voorliefde voor wiskunde hebben, dat is dus de overgroote meerderheid, d.w.z. het zijn die leerlingen, waarnaar de methodiek van het middelbaar onderwijs zich te richten heeft.

Zij zijn in hooge mate gebaat met een beperkt vast stelsel van stellingen, methoden en formules, dat ze door voortdurende oefening tenslotte met begrip leeren beheerschen; als men te veel eischt van hun uitvindingsvermogen, worden ze ontmoedigd en het resultaat is meestal toch slechts tijdverlies. Ook oordeele men niet te gering over de waarde van een onderwijs, waarin dit systeem consequent wordt toegepast en waarin dus de eisch van correcte reproductie van het geleerde vaker wordt gesteld dan die van het zelf vinden van nieuwe wegen. Het ontwikkelt niet in de eerste plaats het vermogen tot zelfstandig scheppend werk, maar het brengt begrip aan van de macht der wiskundige methoden, het bevordert ordelijk en rustig denken en het leidt tot nauwgezet en net werken; kan men van wiskunde-onderwijs aan leerlingen, die grootendeels met dat vak later nooit meer in aanraking zullen komen, redelijkerwijze wel veel meer verlangen?

DE TANGENSREGEL

DOOR

U. H. VAN WIJK.

In no. 5/6 van den 6den jaargang van dit tijdschrift beveelt Prof. Van der Waerden een andere methode aan ter berekening van de onbekende elementen van een driehoek, bepaald door twee zijden en den ingesloten hoek, dan die, waarbij de tangensregel gebruikt wordt. Deze methode treft men ook aan in het Handbuch der Trigonometrie van Hammer (blz. 235).[1])

Gaarne zou ik iets ten gunste van de gebruikelijke methode aanvoeren. Er is aan de kwestie ook nog een aesthetische kant. Ik vind met Hammer de methode met den tangensregel fraaier dan de andere. H. zegt ervan: „Diese zweite vollständige Auflösung ist wegen ihrer Symmetrie die beste und die schönste." (blz. 237).

Van overbodige ballast is m.i. ook geen sprake. We hebben te doen met het probleem, dat van twee onbekende hoeken de som en de verhouding hunner sinussen gegeven is en dit komt bij het m.o. herhaaldelijk ter sprake, n'en déplaise de officieele afschaffing der goniometrische vergelijkingen. De heer Wijdenes lost

$$x + y = a \quad \text{en} \quad \sin x : \sin y = p : q$$

in zijn leerboeken altijd op volgens het recept:

$$(\sin x - \sin y) : (\sin x + \sin y) = (p - q) : (p + q) \text{ enz.}$$

en deze oplossing is toch door haar symmetrie zeker te prefereeren boven een andere (vergelijk Hammer blz. 210). Waarom haar dan bij de oplossing van het probleem van Snellius niet toegepast? (Euclides 6e jrg. blz. 244 e. v.). Hammer geeft zijn oordeel over de gebruikelijke oplossing van dat probleem in de volgende bewoordingen: „Die im vorstehenden gegebene Lösung „mit dem Hilfswinkel" ist wegen ihrer vollständigen Symmetrie die beste" (blz. 330).

---

[1]) Verrijp noemt ze ook op blz. 126 van zijn leerboek.

Wil men het zonder tangensregel doen, dan verdient m.i. de methode met cosinus- en sinusregel de voorkeur. Deze toch wordt in de mechanica ook steeds toegepast (grootte en richting van de resultante van twee krachten of andere vectoren), zoodat men dan uniformiteit in de oplossing zou verkrijgen. Men make dan gebruik van kwadraat- en worteltafel.

Op een analoog geval vestig ik in dit verband nog even de aandacht. De methode met een hulphoek ter oplossing van: $a \sin x + b \cos x = c$ is uit een aesthetisch oogpunt te prefereeren boven een, die meer voor de hand ligt. Hammer drukt dit weer als volgt uit: „Diese zweite Lösung ist aber, weil vollständig symmetrisch, in algebraischer Hinsicht, und da die logarithmische Rechnung sehr einfach ist, überhaupt in jeder Beziehung vorzuziehen." (blz. 206).

Het invoeren van een hulphoek komt evenals bij het probleem van Snellius neer op de vervanging van rechthoekige door poolcoördinaten en kan dus ook nog wel ander dan rekentechnisch nut hebben. Bij vraagstukken uit de mechanica, waarbij de wrijving niet verwaarloosd wordt, is de hulphoek de wrijvingshoek.

OPMERKINGEN OVER HET ONDERWIJS IN MECHANICA ALS ONDERDEEL DER PHYSICA

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

In het voor korten tijd verschenen tweede deel van het *„Nieuw Leerboek der Natuurkunde"* van W. Reindersma en Dr. T. van Lohuizen wordt een veel grooter deel van de mechanica behandeld, dàn in de meeste natuurkunde-leerboeken, die zich tot een inleiding plegen te beperken, het geval is. Bovendien verschilt de door de schrijvers gevolgde methode in zooverre van de tot dusver in ons land gebruikelijke, dat ze in veel ruimere mate dan deze gebruik maakt van experimenteele hulpmiddelen.

Daar het te voorzien is, dat dit boek grooten invloed zal uitoefenen op de ontwikkeling van ons onderwijs in mechanica en natuurkunde, stel ik er prijs op, hier eenigszins uitvoeriger dan in een boekbespreking het geval kan zijn, den door de schrijvers gevolgden weg ter behandeling van de mechanica te bespreken. Ik zal daarbij op verschillende punten, waar de gekozen vorm van uiteenzetting mij aan principieele bedenking onderhevig schijnt, kritiek moeten uitoefenen, niet met de bedoeling, daardoor het inderdaad verdienstelijke werk, dat de schrijvers door het schrijven van hun leerboek in vele opzichten bezig zijn te verrichten, te kleineeren, maar in de hoop, dat voortgezette discussie over de waarlijk groote moeilijkheden, die het mechanica-onderwijs met zich meebrengt, ten slotte zal kunnen voeren tot een algemeen aanvaardbare oplossing van de hierbij optredende didactische problemen.

Ik laat hier eerst een korte schets van den inhoud van die hoofdstukken van het boek, die over mechanica handelen, voorafgaan.

In Deel I, dat in 1929 verschenen is, wordt het statische krachtbegrip ingevoerd en met behulp van metingen aan schroefveeren behandeld. De samenstelling van krachten en de toepassing van het statische krachtbegrip op enkelvoudige werktuigen sluiten hierbij

aan, vervolgens wordt het begrip arbeid opgesteld, waarna nog de samenstelling van evenwijdige krachten en de leer van het zwaartepunt volgt. Over dit gedeelte der stof heb ik reeds enkele opmerkingen gemaakt in mijn bespreking van Deel I (Euclides VI (1929—1930), 75 seq.); ik zal er nu niet op terug komen.

Deel II begint nu in Hoofdstuk I met de Bewegingsleer: relativiteit van de begrippen rust en beweging; eenparige beweging met *s-t*-diagram; traagheid; veranderlijke beweging ; meting van de snelheid op zeker oogenblik aan het valtoestel van Atwood; afgelegde weg als ordinaten-oppervlak van het *v-t*-diagram; eenparig versnelde beweging, gedemonstreerd aan het toestel van Atwood; vrije val, rechtstreeksche meting van de versnelling hiervan; samenstelling van bewegingen; worp.

Hierna volgt in Hoofdstuk II de dynamische krachtenleer; massa en gewicht; wetten van Newton. Daarna een hoofdstuk over arbeid en arbeidsvermogen, besloten door een experimenteele behandeling van de wrijving. Een volgend hoofdstuk handelt over gedwongen bewegingen: slingerbeweging met proeven over den slingertijd in zijn al of niet afhankelijkheid van amplitudo, massa van het slingerlichaam, lengte van den slinger en versnelling van den vrijen val. Eenparige cirkelbeweging; theoretische afleiding van de hiervoor benoodigde kracht, gevolgd door experimenteele toetsing van het verkregen resultaat.

In het groot gedrukte deel van het boek, dat de minimumstof behandelt, volgt nu de invoering van de begrippen impuls en hoeveelheid beweging en de behandeling van den druk van een lichaam op een versneld bewogen horizontaal vlak. Later nog een hoofdstuk over elasticiteit met een experimenteel onderzoek naar het verband van vormverandering en vormveranderende kracht; invoering van elasticiteitscoëfficient en elasticiteitsmodulus. Vervolgens elastische trillingen met experimenteele onderzoekingen over den trillingstijd en ten slotte de elastische botsing.

In de klein gedrukte hoofdstukken of paragraphen, die de keuzeonderwerpen bevatten, komen naast het boven vermelde nog ter sprake: zwaartekracht of gravitatie, wetten van Kepler, gravitatiehypothese van Newton; strengere definitie van de snelheid van een veranderlijke beweging op zeker oogenblik; rotatie van een vast lichaam; draaimoment, traagheidsmoment en hoeveelheid draaiing; verband van deze grootheden; physische slinger; experimenteele

bepaling van een traagheidsmoment; torsietrillingen; overzicht van de geschiedenis van de mechanica; wiskundige behandeling van de harmonische trilling.

Ik wil nu beginnen met te verklaren, dat ik door de kennismaking met de boven beschreven hoofdstukken (en in nog hoogere mate door de bestudeering van het kort geleden verschenen eerste deel van de interessante *Einführung in die Physik* van Pohl) wel tot het inzicht ben gekomen, dat het gebruik maken van experimenteele hulpmiddelen een waardevol bestanddeel van het onderwijs in mechanica (dat ik me echter als zelfstandig leervak blijf denken) kan zijn en men zal het steeds als een groote verdienste van de commissie-Fokker in het algemeen en van de heeren R. en v. L. in het bijzonder moeten beschouwen, dat zij op die waarde door woord en daad hebben gewezen. Echter zal de experimenteele methode alleen onder deze voorwaarde een gunstigen invloed op het mechanica-onderwijs kunnen uitoefenen, dat zij niet zal leiden tot een verslapping van de zorg, die de meer mathematisch georienteerde docenten in toenemende mate besteden aan de in dit vak zoo hoognoodige exactheid van begripsvorming, formuleering en afleiding.

En juist die voorwaarde is naar mijn meening in het werk van R. en v. L. niet in die mate vervuld, die in de vierde klasse eener H. B. S. (waarvoor dit deel bestemd is) met het oog op de ontwikkeling der leerlingen mogelijk en in verband met het doel van het onderwijs in wis- en natuurkunde wenschelijk moet worden geacht. Hierin nu ligt de aanleiding tot het schrijven van dit artikel: het zou zeer te betreuren zijn, indien bij een eventueele ontwikkeling van het mechanica-onderwijs in experimenteele richting het in dit boek aanvaarde betoogpeil een door anderen nagevolgde norm van exactheid zou gaan vastleggen; daarom zou ik aan enkele voorbeelden willen demonstreeren, wat men, staande op het toch ook door de schrijvers ingenomen standpunt, dat bevattelijkheid en wetenschappelijkheid elkaar niet behoeven (neen zelfs niet mogen en niet kunnen) uitsluiten, op dat betoogpeil kan aanmerken.

Ik spreek daartoe achtereenvolgens over drie verschillende onderwerpen, om met enkele losse opmerkingen te besluiten. Die onderwerpen zijn:

A. Het begrip versnelling.

B. De middelpuntzoekende en de middelpuntvliedende kracht.

C. De samenstelling van bewegingen.

A. *Het begrip versnelling.*

Dat het begrip versnelling zoo moeilijk aan de leerlingen is bij te brengen, ligt voornamelijk aan de ongelukkige keuze van het woord, dat in de dagelijksche omgangstaal een beteekenis heeft, die niet slechts in scherpte van bepaling, maar ook en vooral in inhoud afwijkt van die, waarin de mechanica het gebruikt: in het dagelijksch leven beduidt nl. versnelling meestal niet meer dan snelheidstoename (b.v. stroomversnelling; versnelling van tempo), terwijl het in de mechanica de als vector beschouwde veranderingssnelheid van een snelheidsvector aangeeft. Naast de quantitatieve preciseering (verandering per seconde inplaats van verandering zonder meer) staat dus een uitbreiding in dien zin, dat ten eerste de snelheid, waarmee de scala-waarde eener snelheid afneemt en ten tweede de snelheid van richtingsverandering daaronder worden begrepen.

Vooral door de laatst genoemde uitbreiding verschilt de behandeling van het versnellingsbegrip, weliswaar niet essentieel, maar dan toch in hooge mate gradueel, van die van het begrip snelheid. Om tot een zuivere opvatting van het snelheidsbegrip te komen, moet men namelijk ook zoowel een aanwezige vage voorstelling preciseeren (door de beschouwing van tijdvakken, welker duur tot nul nadert), als het gepreciseerde begrip uitbreiden (snelheid als vector). Maar hier is de aanwezige vage voorstelling althans in beginsel juist, terwijl de invoering van de vectoropvatting blijkens de ervaring weinig moeite oplevert.

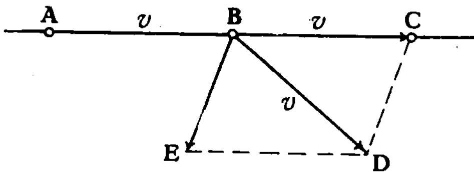
Geheel anders bij versnelling: hier moet een ingeworteld vooroordeel (dat versnelling steeds snelheids*toename* beduidt) worden uitgeroeid; men moet het zoover zien te brengen, dat er geen gevoel van verbazing meer bij de leerlingen opkomt, wanneer men naar de *versnelling* van een *eenparige* cirkelbeweging vraagt en dat eischt tijd, geduld en groote zorgvuldigheid.

Ik wil nu schetsen, hoe de gestelde taak in het boek van R. en v. L. wordt verricht.

Op blz. 13 wordt gesproken over een trein, die met toenemende snelheid rijdt; de beweging hiervan wordt veranderlijk genoemd en wel versneld. Op blz. 16 wordt nog eens opnieuw een beweging met toenemende snelheid uitdrukkelijk een versnelde beweging genoemd, terwijl op blz. 20 de (constante) snelheidstoename per

seconde van een eenparig versnelde beweging de versnelling van die beweging wordt genoemd. In dezen zin worden de woorden versnelde beweging en versnelling gebruikt tot blz. 65.

Hierna wordt opgemerkt, dat volgens de traagheidswet een lichaam zich niet eenparig kromlijnig kan bewegen, zonder dat er een kracht op werkt, waaruit dan volgt, dat er bij zulk een beweging ook van een „versnelling" moet worden gesproken, ofschoon er van het toenemen van de snelheid geen sprake is. Hoe dit kan, wordt als volgt toegelicht:



„Laat een punt zich „met een constante „snelheid bewegen „over de lijn ABC, en „laat de afstand AB in „1 sec. worden afge- „legd. Laat nu in B de richting veranderen, terwijl de grootte der „snelheid dezelfde blijft. Het lichaam komt na 1 sec. in D. Daarvoor „is noodig, dat aan de bestaande snelheid BC een nieuwe snelheid „wordt toegevoegd. Volgens den parallelogramregel is de toege- „voegde snelheid BE. De toegevoegde snelheid is de totale versnel- „ling, het is nl. de snelheidsverandering in 1 sec. Om de richtings- „verandering te bewerkstelligen is noodig, een kracht gericht volgens „BE en evenredig met BE ($K = ma$)".

Hierna wordt meegedeeld, dat men bij voortdurende verandering van richting deze redeneering moet houden voor steeds kleinere rechte stukjes van de (kromme!) baan en dan na moet gaan, wat er gebeurt met de gemiddelde waarde van de versnelling per seconde, als de baanelementen en tijden steeds meer tot 0 naderen. Een strengere behandeling hiervan wordt aan het mechanica-onderwijs overgelaten.

Op blz. 67 wordt vervolgens afgeleid, wat de richting van de versnelling bij een eenparige cirkelbeweging is. Hiertoe wordt het vectorverschil van de snelheden op twee naburige tijdstippen gevormd en wordt aangetoond, dat de hoek van dit vectorverschil met den eersten snelheidsvector tot 90° nadert, als de beschouwde tijdsduur nadert tot nul.

Het hiermee, naar ik hoop, voldoend weergegeven betoog, geeft nu aanleiding tot twee vragen:

1. Is de gehouden redeneering overtuigend en bevredigend?

2. Zoo neen, is haar onvolkomenheid dan op didactische gronden te verdedigen?

Het komt mij dan voor, dat niemand de eerste vraag bevestigend zal kunnen beantwoorden. In de eerste plaats toch is het dynamische betoog, dat er bij een eenparig kromlijnige beweging een versnelling moet optreden, een volstrekt paralogisme. De stelling $K = ma$ toch is afgeleid en geverifieerd op een oogenblik, dat versnelling nog niets anders beteekent dan snelheids*toename* per seconde. Wanneer men dan door toepassing van de traagheidswet concludeert, dat er bij een eenparig kromlijnige beweging een kracht werkzaam is en dan uit het bestaan van een kracht het optreden van een versnelling afleidt, dan heeft men geconcludeerd tot het bestaan van een snelheidstoename bij een eenparige beweging en dan kan men niets anders doen dan constateeren, dat er een contradictie optreedt en dat er dus òf aan den voorafgaanden opbouw òf aan de thans gehouden redeneering iets moet haperen.

Ten tweede wekt de boven bij fig. 1 gegeven afleiding allerlei vragen. In de eerste plaats al die naar haar beteekenis. Ik ben er niet zeker van, dat ik deze goed begrepen heb; het komt mij echter voor, dat ze als volgt bedoeld is. BC stelt de snelheid in B voor op het oogenblik, dat de kracht begint te werken en tevens den weg, dien het punt, onttrokken aan uitwendige invloeden, in de volgende seconde zou afleggen (dit kan natuurlijk, als men een snelheid van 1 cm/sec. door hetzelfde lijnstuk afbeeldt als een weg van 1 cm). BE moet blijkbaar den weg aanduiden, dien het punt in de volgende seconde zou afleggen, als het in B geen snelheid had, maar wel onderworpen werd aan de werking van de kracht, die blijkbaar gedurende de heele seconde blijft werken en dus geen stootkracht is; tevens echter geeft BC de gemiddelde snelheid van de laatst beschouwde beweging gedurende de beschouwde seconde aan. Maar wat is toch wel BD?

Blijkbaar niet (al zal de argelooze leerling dit op blz. 65 wellicht meenen te moeten lezen) de door het punt in de seconde, volgende op het passeeren van B, werkelijk afgelegde weg (immers de baan is een parabool), maar wel de vector „verplaatsing" in de beschouwde seconde of (wegens $t = 1$) het quotient van dezen vector door den verstreken tijd, dus de gemiddelde verplaatsing. Maar is dat nu *de* snelheid van de beweging na B? Is deze beweging dan eenparig? En op welk oogenblik wordt anders de snelheid bedoeld?

En hoe moeten we de mededeeling over de kracht opvatten, die evenredig is met BE? Men krijgt den indruk, dat zij gelijk wordt gesteld aan het product van BE en de massa van het bewegende stoffelijk punt. Maar BE (weg in 1 sec. onder invloed van een constante kracht zonder beginsnelheid) is in getalwaarde gelijk aan de *halve* versnelling.

Heeft er dan in B toch een stootkracht gewerkt, die de snelheid plotseling wijzigde van BC tot BD? Maar dan kan men $K = ma$ niet toepassen en bovendien komen stootkrachten pas in een later stadium aan de orde.

Ten slotte de afleiding van de richting van de versnelling. De schrijvers zeggen hier, dat ze de toegevoegde snelheid per seconde berekenen, maar ik kan niet vinden, dat ze dat ook doen; immers dan hadden ze het vectorverschil in elk stadium van de redeneering moeten deelen door den duur van het beschouwde tijdvak. Nu ze dit nalaten, nadert de grootte van den door hen beschouwden vector met het beschouwde tijdvak tot nul. De limiet van de toegevoegde snelheid per seconde is dus een vector met grootte nul. Maar heeft het nog zin over de richting van een nulvector te spreken? Zonder speciale definitie zeker niet!

Uit het bovenstaande blijkt wel, dat de gegeven redeneeringen logisch onhoudbaar zijn. Thans rest de tweede vraag: is dit op didactische gronden te verdedigen?

Men meene niet, dat het principieel overbodig is, deze vraag te stellen: het is nu eenmaal onmogelijk, bij het lesgeven op een Middelbare School steeds op wetenschappelijk volkomen verantwoorde wijze te werk te gaan; menig probleem kan eerst op hooger peil van ontwikkeling, dan daar te bereiken is, als zoodanig worden begrepen en het is verloren moeite, het voor dien tijd te willen oplossen. Men moet dus vaak aan het wetenschappelijk geweten het zwijgen opleggen, om het didactisch geweten te kunnen bevredigen en er kunnen dan ook heel wat onvolkomenheden van de bij het M.O. gebruikelijke leerboeken worden verklaard (of verontschuldigd) door de overweging, dat de uiteenzetting bedoeld is voor jeugdige beginnelingen en niet voor geoefende wetenschappelijke denkers.

Overbodig kan de boven gestelde vraag dus in geen geval genoemd worden; dit neemt echter niet weg, dat ik haar met nadruk ontkennend zou willen beantwoorden. Inderdaad, het is van didac-

tisch standpunt uit niet alleen geoorloofd, maar zelfs geboden, om soms dingen te schrijven en te zeggen, die vaag zijn, onvolledig of overbodig en die dus bij verder voortgezet onderwijs preciseering, aanvulling of beperking behoeven. Maar ik weiger te gelooven, dat men ooit didactische belangen dient door het geven van uiteenzettingen, die eenvoudig onjuist zijn en die in een later stadium van ontwikkeling, inplaats van als basis te kunnen dienen, waarop verder wordt voortgebouwd, noodzakelijk verworpen zullen moeten worden. Men kan als docent heel goed overtuigend iets uitleggen, als men een deel van wat voor een volledig betoog noodig zou zijn, verzwijgt (zoo bijv. bij het toepassen van de axiomata der meetkunde); maar men kan onmogelijk diezelfde overtuigende werking uitoefenen, wanneer men een redeneering moet houden, die reeds bij een geringe mate van kritiek als volstrekt onhoudbaar moet worden erkend.

Wij hebben, als docenten in Wis- en Natuurkunde, toch altijd nog zekere illusies aangaande de vormende werking, die deze vakken op het intellect van de leerling hebben; we plegen er den nadruk op te leggen, dat het niet in de eerste plaats gaat om het aanbrengen van zooveel mogelijk parate kennis, maar om zuiverheid van begrip, om inzicht in de wetenschappelijke methode. Maar wat moet een leeraar, die, door dergelijke idealen bezield, het boek van R. en v. L. gebruikt, doen als een leerling, die over het geleerde nadenkt, hem het volgende excerpt uit het leerboek ter beoordeeling voorlegt?

blz. 7. Als er op een lichaam geen kracht werkt, is de beweging eenparig rechtlijnig; bij een eenparig kromlijnige beweging werkt dus een kracht.

blz. 20. De snelheidstoename per seconde noemen we de versnelling.

blz. 37. seq. Een kracht veroorzaakt een versnelling (dus een snelheidstoename).

blz. 65. Bij een eenparig kromlijnige beweging bestaat een kracht, dus een versnelling.

blz. 66. En wanneer er een versnelling is, werkt er dus een kracht.

Kort samengevat: bij een eenparig kromlijnige beweging is er een kracht werkzaam, omdat er een oorzaak moet zijn voor de snelheidstoename, die het gevolg is van de kracht, die blijkens de traagheidswet in verband met de kromlijnigheid van de beweging op het lichaam werkt.

Ik kan waarlijk de vormende werking van dezen duizelingwekkenden cirkelgang niet inzien.

Hoe is het nu echter te verklaren, dat in een over het algemeen toch zorgvuldig samengesteld en goed doordacht boek van twee ervaren docenten fouten konden insluipen als de boven geschetste? De voornaamste oorzaak hiervan is, dunkt mij, niet ver te zoeken: zij ligt in den met redelijke gronden niet te verdedigen (althans nog niet verdedigden), maar in sterke gevoelsoverwegingen wortelenden tegenzin, dien de schrijvers met vele docenten bij het M.O. deelen, den tegenzin nl. tegen een onomwonden toepassing van af de vierde klasse van de H.B.S. van de grondbegrippen van de infinitesimaalrekening. Hoe sterke bezwaren men hier vrij algemeen tegen heeft, is duidelijk tot uiting gekomen bij de publicatie van het ontwerpleerplan van de commissie-Beth, waarin de behandeling van die grondbegrippen was opgenomen. Men vond dit een soort grootdoenerij, een poging, het M.O. te doen leven boven zijn stand, een miskenning van het elementaire karakter, dat dit onderwijs moet kenmerken.

Wellicht zal echter menigeen dit oordeel wel willen herzien, wanneer hij eens aan de hand van het boven behandelde voorbeeld nagaat, wat er van de behandeling van het begrip versnelling terecht komt, wanneer men opzettelijk alle infinitesimale beschouwingen verbant. Hij zal dan moeten erkennen, dat het verschil tusschen de behandelingswijze van de mechanica, die de commissie-Beth voorstelde en die, welke men in het leerboek van R. en v. L. kan aantreffen, niet zoozeer (zooals men het wel eens heeft willen voorstellen) hierin bestaat, dat de eerste methode met miskenning van het natuurlijke recht van den leerling (het recht op bevattelijkheid van het gegeven onderwijs) slechts oog zou hebben voor een wetenschappelijke correctheid, die den leeraar zou kunnen bevredigen, terwijl de tweede aanpassing aan het bereikte ontwikkelingspeil van de leerlingen zou stellen als een hoofddoel, dat desnoods ten koste van onlustgevoelens van den docent zou moeten worden bereikt, maar veeleer hierin, dat de commissie-Beth voor alles bedacht was op een wijze van ontwikkeling van de fundamenteele begrippen, die later slechts aanvulling en uitbreiding, maar geen principieele wijziging meer zou behoeven, terwijl de heeren R. en v. L. van meening zijn, dat de didactiek eischt, althans toelaat, dat men sommige moeilijke onderwerpen eerst op logisch onhoudbare wijze onderwijst,

om een voorloopig begrip te wekken en ze dan later nog eens aan de orde stelt, om ze dan geheel correct te behandelen.

Ik voorzie hier een tegenwerping, die door of namens de schrijvers zou kunnen worden gemaakt. Ongetwijfeld, zal zij luiden, zou het beter en doeltreffender zijn, om het begrip versnelling (en dan natuurlijk ook snelheid) met behulp van de begrippen der infinitesimaalrekening te behandelen. Maar wanneer de uiteenzetting daarvan nu eenvoudig eens boven het begrip van de leerlingen eener vierde klasse H.B.S. blijkt te liggen, zoodat men een werkelijk inzicht in de conceptie van een differentiaal-quotient ondanks alle moeite niet kan verwekken? Wordt dan een behandelingswijze van versnelling, zooals R. en v. L. die geven, niet tot plicht?

Ik kan hierop alleen het volgende antwoorden: wanneer het werkelijk vast komt te staan, dat men in de vierde klas de beginselen van de differentiaalrekening niet vruchtdragend kan behandelen, dan is er nog slechts één conclusie aangaande het begrip versnelling mogelijk: vermijd het; d.w.z. beperk het natuurkundeonderwijs zoover, dat dit begrip er niet in optreedt. Maar leef niet in de illusie, dat men aan dezelfde leerlingen, waaraan men niet kan bijbrengen, wat een differentiaalquotient is, wel zou kunnen leeren, wat men onder een versnelling moet verstaan.

Er ligt echter, naar het mij voorkomt, aan de methode van R. en v. L. nog een tweede min of meer bewust beleden didactisch beginsel ten grondslag, dat in het mechanica-onderwijs vaker tot minder gewenschte gevolgen voert. Dit beginsel is zoo te formuleeren, dat men ter wille van de aanknooping aan den bij den leerling aanwezigen voorraad van voorstellingen en begrippen hem zooveel mogelijk moet suggereeren, dat het onderwijs niet veel meer doet, dan die voorstellingen scherper te omlijnen en die begrippen correcter te formuleeren. Dit is een beginsel, dat in sommige gevallen (b.v. bij de behandeling van het begrip snelheid) met vrucht kan worden toegepast, maar dat bij andere gelegenheden, namelijk, waar een begrip moet worden ingevoerd, dat òf niet òf in verkeerden vorm aanwezig is, niet kan worden aanbevolen. Dit is met name het geval bij de concepties versnelling en arbeid, die beide worden aangeduid door woorden, waaraan in het dagelijksch leven een andere beteekenis toekomt dan in de mechanica. Ik wees hier boven reeds op, wat de versnelling betreft; met arbeid is het al niet anders ge-

steld; in de gewone omgangstaal is arbeid verrichten onafscheidelijk gebonden aan zich inspannen, terwijl in de natuurkunde inspanning zonder arbeidsverrichting mogelijk is en, als men niet al te anthropomorphe voorstellingen omtrent krachten heeft, arbeidsverrichting zonder inspanning regel. In zulke gevallen nu kan het aanknoopen aan de uit het dagelijksch leven bekende beteekenis van de in te voeren termen slechts misverstand veroorzaken. Men moet hierbij den moed hebben, eens ronduit synthetisch te werk te gaan en dus den leerlingen in een of anderen vorm de volgende inleiding aan te bieden: „Ik voer in het begrip versnelling. Dat dit woord in het dagelijksch leven ook wel voorkomt, doet niet ter zake. Tracht dat voorkomen te vergeten en denk bij het woord versnelling uitsluitend aan datgene, wat we nu als zijn beteekenis in de mechanica zullen leeren kennen". En voor arbeid iets soortgelijks. Het verdient in dit verband wellicht zelfs aanbeveling, de versnelling onmiddellijk voor de algemeene kromlijnige beweging als vector in te voeren en later door specialiseering te laten zien, dat haar scalawaarde in de rechtlijnige beweging de toenamesnelheid van de snelheid is. En evenzoo arbeid niet eerst voor een bijzonder geval te definieeren als product van kracht en weg, maar inmiddellijk als scalair product van de vectoren kracht en weg, als de kracht constant is in grootte en richting en de weg rechtlijnig en dit begrip dan dadelijk uit te breiden, totdat het ook het geval van een veranderlijke kracht en een kromlijnige baan omvat. Daarbij komen dan onvermijdelijk weer infinitesimale redeneeringen te pas. Het zal wel geen nadere vermelding behoeven, dat R. en v. L. dezen weg niet volgen. Voor hen blijft de definitie van arbeid steeds: kracht maal weg; ze achten het niet noodig in het veld van een electrische puntlading opnieuw te definieeren, wat men onder den verrichten arbeid heeft te verstaan, waardoor hun afleidingen echter weer feitelijk zinledig worden.

Ik ga hier echter niet nader op in; het meeningsverschil, dat ons verdeelt, is hier namelijk mutatis mutandis juist hetzelfde als bij de versnelling.

B. *Centripetale en Centrifugale kracht.*

Het is een oude en reeds veel omstreden kwestie, die we hier aanroeren. In de laatste jaren was er echter in het M.O. weinig aanleiding meer, om haar te stellen, omdat de toonaangevende leer-

boeken der Natuurkunde zich waren gaan onthouden zoowel van het onjuiste, als van het juiste gebruik, dat men van den term Centrifugaalkracht kan maken. Bij R. en v. L. is dit woord nu weer in eere hersteld, maar helaas in zijn onjuiste beteekenis. Het is daarom noodig, er eenige opmerkingen over te maken. We schetsen daartoe eerst weer de wijze, waarop de schrijvers het begrip centrifugaalkracht invoeren.

Ze stellen zich daartoe voor (blz. 66), dat een stoffelijk punt op een glad horizontaal vlak aan den binnenkant van een cylindrischen wand eenparig rondloopt. De voor deze beweging noodige kracht wordt opgeleverd door den druk van den wand. De wand ondervindt de reactie van dezen druk als een van het middelpunt af gerichte kracht, die centrifugaalkracht genoemd wordt. Een analoge beschouwing geldt voor een stoffelijk punt, dat rondgeslingerd wordt aan een touw. In beide gevallen is de centrifugaalkracht dus een reactiekracht, die niet werkt op het beschouwde zich bewegende stoffelijke punt, maar op de stoffelijke binding, die de cirkelvormige beweging mogelijk maakt.

Men kan *dit* gebruik van het woord centrifugaalkracht niet onjuist noemen, hoogstens overbodig en tot verwarring aanleiding gevend. Het merkwaardige is nu echter, dat de schrijvers het woord verder niet meer in dezen zin gebruiken, maar in een anderen, waarin het wel een kracht aanduidt, die op het zich bewegende stoffelijke punt werkt.

Zoo wordt op blz. 71 de vraag gesteld, hoeveel maal per seconde met een met water gevulden emmer in een verticaal vlak in een cirkel met 50 cm straal moet rondslingeren, opdat het water er niet uit zal vallen. De oplossing hiervan wordt verkregen, door de voorwaarde te stellen, dat in het hoogste punt van de baan het gewicht van het water gelijk moet zijn aan de middelpunt*vliedende* kracht. Dit is echter alleen begrijpelijk, wanneer de middelpuntvliedende kracht wordt opgevat als een kracht, die op het water werkt. Maar dat is ten eerste in strijd met de definitie, die de schrijvers van centrifugaalkracht hebben gegeven, en ten tweede is het onjuist. Immers een centrifugale kracht, werkend op een stoffelijk punt, dat zich beweegt in een cirkelvormige baan, zou een centrifugale versnelling moeten veroorzaken, terwijl de versnelling van de cirkelbeweging juist centripetaal is. Ook op andere

plaatsen wordt de centrifugale kracht opgevat als een kracht, die op het bewegende lichaam werkt.

Nu is het mij natuurlijk bekend, dat die opvatting wel houdbaar is en zelfs op twee verschillende manieren. Wanneer men een rotatie om een t.o.v. een vast assenstelsel vaste as wil behandelen met behulp van het principe van d'Alembert, kan men een schijnkracht invoeren, die gelijk is aan het tegengestelde van het product van de massa en de centripetale versnelling en deze schijnkracht dan centrifugale kracht noemen. En wanneer men dezelfde rotatie wil behandelen t.o.v. een aan het roteerend lichaam vast verbonden assenstelsel, kan men de geldigheid van het axioma $K = ma$ t.o.v. het versnelde assenstelsel handhaven, mits men de centrifugale kracht als traagheidskracht invoert. De mogelijkheid hiervan is in beginsel reeds door Huygens op volmaakt heldere wijze uiteengezet in zijn werk *De Vi Centrifuga.*

De schrijvers echter volgen bewust geen van deze beide wegen. Over de herleiding van dynamische vraagstukken op statische, zooals het principe van d'Alembert deze mogelijk maakt, wordt niet gesproken en ik geloof ook niet, dat zij andere assenstelsels beschouwen dan zulke, die vast verbonden zijn aan de aarde. Zekerheid verkrijgt men hierover echter niet. Op blz. 6 wordt namelijk weliswaar in dikgedrukte letters verklaard, dat we er steeds aan moeten denken, op te geven ten opzichte van welk coördinatenstelsel de beschrijving van den bewegingstoestand van een lichaam geschiedt, want dat de opgave alleen met betrekking daartoe zin heeft, maar van de uitvoering van dit goede voornemen komt niet veel; men zal moeite hebben, een plaats in het boek te vinden, waar, als er sprake is van bewegingen, het gebruikte assenstelsel wordt opgegeven (een uitzondering vormt de behandeling van de samenstelling van bewegingen op blz. 28). Men komt daardoor ook niet te weten, of de grondstelling $K = ma$ alleen voor een vast assenstelsel geldt of dat zij ook voor assenstelsels, die een versnelling bezitten ten opzichte van een vast assenstelsel, kan worden toegepast.

In ieder geval blijkt uit het bovenstaande wel, dat de schrijvers niet over centrifugale krachten hadden mogen spreken. Wat hen daartoe kan hebben bewogen, kan ik slechts vermoeden. Dat het geschied is, lijkt mij zeer te betreuren; zij weten toch ook wel, dat hier een onuitputtelijke bron van misverstand ligt, niet alleen voor

schooljongens, en ze hadden toch in alle behandelde gevallen hun doel even goed kunnen bereiken, door de voorwaarde te stellen, dat de resultante van de werkende krachten in straalrichting gelijk moet zijn aan het product van de massa en de centri*petale* versnelling.

C. *Samenstelling van bewegingen.*

De behandeling hiervan begint op blz. 28 met het volgende axioma: „De rechtlijnige verplaatsing van eén punt ten opzichte van „een coördinatenstelsel A is onafhankelijk daarvan of dit coördi- „natenstelsel zelf rechtlijnig beweegt ten opzichte van een ander „coördinatenstelsel B".

Ik kan niet zonder nadere uitlegging begrijpen, welke beteekenis aan deze uitspraak moet worden gehecht. Voorloopig zie ik twee mogelijkheden, die als volgt te formuleeren zouden zijn:

I. In het stelsel A is een lijnstuk PQ gegeven. Gegeven is verder, dat een stoffelijk punt zich zoo beweegt, dat de verplaatsing ten opzichte van het stelsel A wordt voorgesteld door het lijnstuk PQ. Dit feit is onafhankelijk van een eventueele rechtlijnige translatie van het stelsel A ten opzichte van het stelsel B.

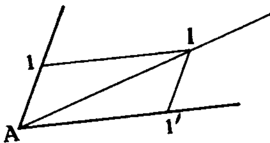
II. De kinematische en dynamische omstandigheden van het beschouwde stoffelijk punt zijn van dien aard, dat het in een zeker tijdvak de verplaatsing PQ heeft ten opzichte van het stelsel A, wanneer dit stelsel in rust is ten opzichte van het stelsel B. Het stoffelijk punt zal nu onder dezelfde omstandigheden in hetzelfde tijdvak dezelfde verplaatsing hebben ten opzichte van het stelsel A, wanneer dit stelsel een rechtlijnige translatie heeft ten opzichte van het stelsel B.

Van deze twee uitspraken is de eerste triviaal en de tweede onjuist. Inderdaad, wanneer gegeven is, dat een punt ten opzichte van zeker coördinatenstelsel een bepaalde verplaatsing heeft, dan is het even overbodig, om te postuleeren, dat dit feit onafhankelijk is van een eventueele beweging van dat coördinatenstelsel ten opzichte van een ander stelsel (ook als die beweging volstrekt willekeurig is), als b.v. uitdrukkelijk vast te leggen, dat het onafhankelijk is van het even of oneven zijn van den datum, waarop de beweging plaats heeft.

Maar, als er bedoeld wordt, dat de beweging van het punt t.o.v. het stelsel A niet kan worden beinvloed door rechtlijnige translaties van A ten opzichte van een ander stelsel, dan is dat volstrekt onjuist.

Willen de schrijvers dan het relativiteitsbeginsel van de klassieke mechanica uitbreiden tot het geval van niet eenparige translaties van het beschrijvingsraam? Zal een kogel, die op het dek van een schip zekere bewegingen uit kan voeren, als het schil stil ligt, zich juist zoo gedragen tijdens versnelde bewegingen van het schip ten opzichte van den wal?

Hierna volgt nu de afleiding van de stellingen van het parallelogram van wegen, het parallelogram van snelheden en het parallelogram van versnellingen op de vroeger algemeen gebruikelijke, maar in nieuwe leerboeken veelal reeds verlaten methode, waarbij over het deelnemen van een punt aan twee bewegingen tegelijk wordt gesproken, op een wijze, alsof deze beide bewegingen plaats hadden ten opzichte van het zelfde assenstelsel en waarbij de beide onderwerpen verandering van omgeving en superpositie van krachtvelden met elkaar worden verward. De redeneeringen, die men hierbij pleegt te houden, zijn algemeen bekend; nu ik ze echter weer eens onder oogen kreeg, heb ik me toch weer verbaasd over de volharding, waarmee men onze leerlingen nog altijd weer dezelfde reeds lang als ontoereikend erkende uiteenzettingen voorzet en over de gedweeheid, waarmee die leerlingen ze nog altijd maar weer schijnen te slikken. Zoo leest men b.v. hier weer:



„Na 1 sec. komt het lichaam ten-„gevolge van de eene beweging van „A naar 1, tengevolge van de andere „beweging van A naar 1′: het komt „dus in I."

Is dit nu eigenlijk niet volmaakt onbegrijpelijk? Na 1 sec. is het punt in 1, maar het is ook in 1′ en omdat het zoowel in 1 als in 1′ is, is het noch in 1, noch in 1′, maar in I.

Terwijl men toch eigenlijk het volgende bedoelt:

na 1 sec. is het bewegende punt P in zijn beweging ten opzichte van een eerste omgeving gekomen in een punt Q van die omgeving, dat ten tijde nul samenviel met het punt 1′ van een tweede omgeving (het vlak van teekening). De eerste omgeving heeft intusschen deelgenomen aan een rechtlijnige translatie ten opzichte van de tweede omgeving, waardoor het punt A van de eerste omgeving gekomen is in het punt 1 van de tweede. Het punt P is nu gekomen in het punt I van de tweede omgeving.

Dit is langer, maar het beduidt tenminste iets; het schijnt wellicht

moeilijker, maar het draagt tenminste eenigszins bij tot de vormende werking van het onderwijs in wis- en natuurkunde.

Op blz. 30 wordt nu als toepassing van de samenstelling van bewegingen het geval behandeld van een lichaam, dat een eenparige beweging heeft en dat er nu een eenparig versnelde beweging in dezelfde richting bijkrijgt.

Ook dit is een zeer gebruikelijke, maar niettemin onhoudbare opvatting. Bij de samenstelling van bewegingen wordt toch altijd gedacht aan een verandering van de omgeving, ten opzichte waarvan de beweging wordt beschreven; maar wat is in het nu beschouwde geval de eerste omgeving, ten opzichte waarvan het punt zich beweegt en wat de tweede, ten opzichte waarvan de eerste in haar geheel bewogen wordt?

Ook de worp wordt op deze wijze behandeld; men moet zich voor het geval van een horizontale beginsnelheid daarbij dus feitelijk voorstellen, dat het voortgeschoten stoffelijk punt zich eenparig blijft bewegen in een horizontale buis, die zelf vrij valt. Gevraagd wordt dan naar de beweging van dat punt ten opzichte van de aarde. Het is een historisch geijkte methode, maar is ze eigenlijk niet onzinnig geforceerd van opvatting? Ongetwijfeld verdient de afleiding van de kogelbaan op grond van de stellingen, dat snelheid en versnelling van een projectie-beweging projectie zijn opv. van snelheid en versnelling van de geprojecteerde beweging (een methode, die de schrijvers toepassen bij de wiskundige behandeling van de enkelvoudige trilling en welker veronachtzaming bij de kogelbaan daarom des te meer verwondert) zoowel uit didactisch als uit wetenschappelijk oogpunt verre de voorkeur.

Ik wil dit opstel thans besluiten met enkele verspreide kritische opmerkingen.

a. Er wordt voortdurend gesproken over lichamen, waar stoffelijke punten bedoeld zijn. Dit is in de meeste natuurkunde-leerboeken gebruikelijk; het is daar echter eenigszins te verontschuldigen, omdat alle in mechanische beschouwingen voorkomende lichamen als stoffelijke punten worden opgevat, zoodat er tenminste geen verwarring kan ontstaan. Dat doen R. en v. L. echter niet; zij behandelen ook iets van de kinematica en de dynamica van het vaste lichaam; zoodra dat gebeurt, wordt echter de scherpe onderscheiding tusschen lichamen en stoffelijke punten dringende noodzaaak.

Moeten leerlingen, die iets van de dynamica van het vaste lichaam hebben geleerd, de wereld ingaan met het waandenkbeeld, dat, zooals op blz. 12 te lezen staat, een *lichaam,* waarop geen krachten werken, in rust of in rechtlijnige eenparige beweging (lees: translatie) verkeert?

b. opvallend onvolledig is de behandeling van den luchtweerstand; op blz. 24 wordt de befaamde proef van de gulden en het even groote stukje papier, die eerst ieder afzonderlijk en dan gezamenlijk vallen, verklaard door de dan nog onbegrijpelijke mededeeling, dat het verschil in valtijd door den luchtweerstand wordt veroorzaakt, maar later wordt hierop niet teruggekomen.

c. De deductieve afleiding van de vermoedelijke betrekking tusschen kracht, massa en versnelling is natuurlijk in dit boek even moeilijk en onbevredigend als in andere, waarin men nog pogingen doet, deze betrekking min of meer te bewijzen. Dit ligt aan het onderwerp; men moet hier wel axiomatiseeren en men kan de moeilijkheid hiervan alleen verlichten door historische inleiding of door experimenteele toetsing. Ik wil daarom volstaan met de opmerking, dat, wanneer de schrijvers op blz. 38 definieeren, wat ze onder gelijke massa's willen verstaan, ze niet enkele regels verder het praedicaat „grooter dan" zonder meer op massa's mogen toepassen.

d. Op blz. 44 staat, dat Newton in zijn derde wet uitspreekt, dat een kracht altijd tusschen twee lichamen werkt. De derde wet wordt daarna als volgt kort geformuleerd: de actie is gelijk aan de reactie. Ze wordt daarna met voorbeelden toegelicht.

Tegen deze passage heb ik verschillende bezwaren:

In de eerste plaats wekt de zegswijze, dat een kracht altijd tusschen twee lichamen werkt, den indruk, dat de schrijvers hier de bekende verwarring van natuurkracht en mechanische kracht begaan. Men kan zeggen, dat de gravitatie een natuurkracht is, welker werking zich openbaart in de wederzijdsche aantrekkende krachten, die twee stoffelijke punten op elkaar uitoefenen. Maar men kan onmogelijk zeggen, dat één mechanische kracht tusschen twee lichamen werkt.

Vervolgens is het niet waar, dat de actie gelijk is aan de reactie; ze is er in grootte aan gelijk, maar ze is tegengesteld gericht. Ik vrees, dat de lezers van het boek zullen meenen, dat Newton zelf zich ook zoo heeft uitgedrukt.

In de *Principia* staat het echter heel duidelijk en uitvoerig: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Ten slotte de voorbeelden:

„Een magneet trekt ijzer aan, maar omgekeerd trekt ook het ijzer „den magneet aan. Welk van beide zich zal gaan bewegen, hangt „er vanaf, welke van de twee bewegelijk is. Leggen we het ijzer en „de magneet op een blokje hout, dat we in een bak met water laten „drijven, dan blijft alles in rust."

Deze alinea is van een verwonderlijke vaagheid; de onbevangen lezer zal beginnen met in de vermelde proef een experimenteele bevestiging te willen vinden van de voorafgaande opmerking; dat blijkt niet het geval te zijn. En alles zou in rust blijven? de magneet en het ijzer ook (als de wrijving op het blok hout ze niet belet, in beweging te komen)? Natuurlijk hebben de schrijvers bedoeld, dat het blok hout in rust blijft. Maar zal de lezer zonder meer het verband van deze bewering met de wet van actie en reactie zien?

Verder wordt meegedeeld, dat, als een steen valt, ook de aarde een versnelling krijgt. Ten opzichte van welk assenstelsel? Toch zeker niet ten opzichte van het door de schrijvers vermoedelijk stilzwijgend steeds gebruikte aan de aarde vast verbonden en als vast beschouwde stelsel. Ten opzichte van dat stelsel geldt de Lex Tertia in dit geval dan ook niet.

e. Op blz. 61 staat, dat de slingertijd van een enkelvoudigen slinger onafhankelijk is van de amplitudo. Dit is, zooals reeds Huygens uitvoerig heeft betoogd, niet waar. De schrijvers zetten verder uiteen, dat men zich over dit isochronisme achteraf niet behoeft te verwonderen: bij grootere amplitudo moet wel een grootere weg worden afgelegd, maar de terugdrijvende kracht is grooter en dus is de snelheid, waarmee de slinger zich beweegt (wat verstaat men daaronder?) grooter. Dat is een vaag gepraat, dat al bedenkelijk zou zijn, als het resultaat juist was, maar dat geheel verwerpelijk is, nu het een verkeerde conclusie plausibel wil maken.

Ik hoop, door het bovenstaande voldoende te hebben aangetoond, dat er tegen de wijze, waarop in het leerboek van de heeren Reindersma en van Lohuizen de mechanica wordt behandeld, bezwaren zijn in te brengen van zoo ernstigen aard, dat het aan ieder, die voor het onderwijs in dit vak in zijn tegenwoordigen vorm nog iets

voelt, wel heel moeilijk wordt gemaakt, te berusten in het streven van de commissie-Fokker, de mechanica òf geheel bij de physica in te lijven òf althans haar urenaantal ten bate van de physica belangrijk te verminderen. Dit is zelfs dan het geval, wanneer hij de wenschelijkheid van een meer experimenteel georienteerde methode van mechanica-onderwijs in beginsel gaarne beaamt. Het is niet de experimenteele methode zelf, die oppositie wekt, maar de wijze, waarop zij tot dusver door haar voorstanders in practijk is gebracht. Het is waar, dat de heeren Reindersma en van Lohuizen lang niet zoo slordig met de grondbegrippen van de mechanica zelf en met de fundamenteele beginselen van de didactiek van dit vak omspringen, als de heer Fokker deed in de eerste van de drie voordrachten, die hij in November 1929 te Haarlem hield. Toch heeft ook hun boek mij weer sterk geschokt in de illusie, dat het mechanica-onderwijs ook wel vruchtdragend zou kunnen zijn, wanneer het volgens de beginselen van de commissie-Fokker werd gegeven.

Het laatste woord over de mechanica als leervak op de middelbare school is blijkbaar nog niet gesproken. Wat we noodig hebben, is een synthese van de thans nog te veel uiteenloopende richtingen, een synthese van de exactheid van Schogt en de aanschouwelijkheid van Reindersma en van Lohuizen. De man, die die synthese tot stand weet te brengen, zal zich zeer verdienstelijk maken voor het Nederlandsche onderwijs in wis- en natuurkunde.

OVER DE BEHANDELING VAN HET VRAAGSTUK VAN SNELLIUS.

In „Euclides”, jaargang 1930, Nr. 5—6, komt een artikel van den Heer Wijdenes voor, waarin uitingen voorkomen, welke ik meen niet onweersproken te mogen laten.

Dit artikel vangt aan met een behandeling van het vraagstuk van Snellius, welke afwijkt van de gebruikelijke behandeling in de schoolboeken, waar alles logarithmisch gemaakt wordt. De

schrijver deelt zonder eenige motiveering mede, dat zijn methode eenvoudiger is dan de gebruikelijke.

Wij mathematici hebben nogal in sterke mate de gewoonte om al onze beweringen op grondige wijze te motiveeren. Het verwondert mij ten zeerste, dat de Heer Wijdenes zich niet aan deze goede gewoonte gehouden heeft. Het wil mij voorkomen, dat, indien de geachte schrijver van dit artikel in die richting een poging aangewend had, het artikel in de pen gebleven zou zijn. Mijn pogingen dienaangaande zijn n.l. ten eenenmale vruchteloos gebleven. Ja, nog sterker, het valt me niet moeilijk om aan te toonen, dat de gebruikelijke methode van behandeling de voorkeur verdient boven die van den Heer Wijdenes.

Wat toch is het geval? Het voorbereidende werk van beide methoden is vrijwel hetzelfde, het rekenwerk eischt in beide gevallen acht maal het gebruik van een tafel, maar...... de Heer Wijdenes mag gebruik maken van drie tafels, n.l. de logarithmentafels der getallen en der goniometrische verhoudingen en de tafel der goniometrische verhoudingen zelf, en dat is nu des Pudels Kern, de Heer Wijdenes wil coûte que coûte aantoonen, dat het gebruik van de tafel der goniometrische verhoudingen zoo nuttig is.

Het is mij een raadsel hoe de Heer Wijdenes aan 't eind van zijn artikel durft verklaren „dat de nog al gezochte oplossing met logarithmen onnoodige moeite en omslachtig werk eischt". Dit is geheel bezijden de waarheid. De hoeveelheid werk is n.l. bij beide methoden precies dezelfde, de kans op het maken van fouten (door het gebruik maken van één tafel meer dan bij de gebruikelijke methode) is echter bij de methode van den Heer Wijdenes veel grooter. In zoo'n geval verdient, meen ik, de logarithmische methode de voorkeur boven een niet-logarithmische.

„De schoolwiskunde heeft menige vooze plek", zoo besluit de Heer Wijdenes zijn artikel. Het wil mij voorkomen, dat de geachte schrijver bij het aanwijzen dier vooze plekken niet bijster gelukkig geweest is. Als deze vele vooze plekken niet erger zijn dan de door den schrijver in zijn artikel gesignaleerde, behoeven we ons over onze schoolwiskunde voorloopig nog niet erg ongerust te maken.

Dr. J. Rozenberg.

INGEKOMEN BOEKEN.

(Van eenige dezer werken volgt eene bespreking in eene volgende aflevering.)

Prof. Dr. A. D. Fokker. Over de akoestiek van zalen, van muziekinstrumenten en van de menschelijke stem. Haarlem, de Erven Loosjes, 1929 . . . . *f* 2.—
„Faraday", tijdschrift voor M.O. en V.H.O. in Natuur- en scheikunde. Groningen, Wolters . . . . . . per jaargang *f* 4.50
H. Püper, Leerboek der Vlakke Meetkunde voor U.L.O., Kweek-, Handelsdagscholen, e.d. Amsterdam, W. Versluys 1930. Deel I, *f* 2.25, deel II . . . . *f* 0.65
Verschenen bij P. Noordhoff — Groningen:
Prof. Dr. J. F. Koksma, Benaderingsproblemen bij irrationale getallen; Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleeraar aan de Vrije Universiteit te Amsterdam . . *f* 0.60
Dr. E. J. Dijksterhuis, Het getal in de Grieksche Wiskunde. Openbare les gehouden bij de aanvaarding van het ambt van Privaatdocent in de Geschiedenis der Wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam . . . . *f* 0.50
Dr. E. E. Mogendorff, Natuurkunde voor het V.H.O. II, 2e druk. *f* 3.90, geb. *f* 4.50
P. Wijdenes en Dr. D. de Lange, Rekenboek voor de H.B.S., *14de druk,* gec. . . . . *f* 1.70
— Vraagstukken uit Rekenboek I, *8e druk,* gec. . . - 1.—
— Vlakke Meetkunde I, *9e druk,* gec. . . . . . . - 2.25
P. Wijdenes, Algebra voor M.U.L.O., *22e druk,* gec. . . . . . - 1.40
— Algebra voor M.U.L.O II A, *9e druk* gec. . . . - 1.50
— Rekenboek voor M.U.L.O. III, *3e druk,* gec. . . . . - 1.50
— Beknopte Algebra I, *5e druk,* gec. . . . . . . - 1.70
— Beknopte Meetkunde I, *6e druk,* gec. . . . . . - 1.70
— Beknopte Meetkunde II, *5e druk,* gec. . . . . - 1.70
— Oplossingen bij Bekn. Meetk., *2e druk* . . . . - 1.—
Wisselink—Wijdenes, Vraagstukken Meetkunde II, *16e druk* . *f* 0.75
Dr. B. Gonggrijp, Tafel B, *4e druk,* geb. . . . . *f* 1.90
P. Wijdenes en Dr. H. J. E. Beth, Nieuwe Schoolalgebra II, *4e druk f* 2.25; III, *3e druk* . . . . *f* 2.25
P. Wijdenes, Kleine Driehoeksmeting met toepassing, gec. *f* 2.—
G. S. Stokmans, Opgaven voor Lijnteekenen met afzonderlijke atlas, gec. . . . . *f* 1.90
Deze verzameling is samengesteld om gebruikt te worden bij het lijnteeken-onderwijs aan de afdeelingen B der H.B.S. met 5 j.c. en in de laagste klassen van middelbare technische scholen. Kennismaking met di tschitterend uitgevoerde werkje wordt leeraren in Beschrijvende Meetkunde en Lijnteekenen sterk aanbevolen.

P. W.